Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 16.2.2022

7 Obyčejné diferenciální rovnice

7.1 Úvod. Základní pojmy I

Definice (1 Okolí, otevřená množina D 8.1.1)

(i) Pro bod $x \in \mathbb{R}^N$ a $\varepsilon > 0$ definujeme ε-ové *okolí* bodu x jako

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \colon \varrho_2(x, y) = \|y - x\|_2 < \varepsilon\},$$

kde

$$\varrho_2(x, y) = \|x - y\|_2 := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

(ii) *Prstencové* ε-ové *okolí* zavádíme předpisem $\mathcal{P}_\varepsilon(x) = \mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$. Je-li $A \subset \mathbb{R}^N$, o bodu $x_0 \in \mathbb{R}^N$ říkáme, že je *hromadným bodem* množiny A, jestliže každé jeho prstencové okolí má neprázdný průnik s A.
(iii) Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je *otevřená* množina, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které je celé obsažené v Ω.

Definice (2 Limita funkce D 8.1.2)

Nechť $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ je hromadným bodem D_f a $y_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě x_0 *limitu* y_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \implies f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_0).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ nebo $f(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$.

7 Obyčejné diferenciální rovnice

7.1 Úvod. Základní pojmy I

Definice (1 Okolí, otevřená množina D 8.1.1)

(i) Pro bod $x \in \mathbb{R}^N$ a $\varepsilon > 0$ definujeme ε-ové *okolí* bodu x jako

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \colon \varrho_2(x,y) = \|y - x\|_2 < \varepsilon\},$$

kde

$$\varrho_2(x,y) = \|x - y\|_2 := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

(ii) *Prstencové* ε-ové *okolí* zavádíme předpisem $\mathcal{P}_\varepsilon(x) = \mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$. Je-li $A \subset \mathbb{R}^N$, o bodu $x_0 \in \mathbb{R}^N$ říkáme, že je *hromadným bodem* množiny A, jestliže každé jeho prstencové okolí má neprázdný průnik s A.
(iii) Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je *otevřená* množina, jestliže ke každému jejímu bodu existuje okolí, které je celé obsažené v Ω.

Definice (2 Limita funkce D 8.1.2)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ je hromadným bodem D_f a $y_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě x_0 *limitu* y_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap D_f \implies f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_0).$$

V takovém případě píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ nebo $f(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$.

Definice (3 Spojitost D 8.1.3)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in D_f$. Řekneme, že zobrazení f je v bodě x_0 *spojité*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_f \implies f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Definice (4 Obyčejná diferenciální rovnice D 8.2.1)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Pak

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

se nazývá *skalární obyčejná diferenciální rovnice* n-tého řádu.

Definice (3 Spojitost D 8.1.3)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in D_f$. Řekneme, že zobrazení f je v bodě x_0 *spojité*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \qquad x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_f \implies f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)).$$

Definice (4 Obyčejná diferenciální rovnice D 8.2.1)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Pak

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

se nazývá *skalární obyčejná diferenciální rovnice n-tého* řádu.

7.1 Úvod. Základní pojmy III

Definice (5 Řešení obyčejné diferenciální rovnice D 8.2.3)

Funkci $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ nazveme *řešením obyčejné diferenciální rovnice* (1), jestliže

- y má na (a,b) vlastní derivace n-tého řádu
- pro všechna $x \in (a,b)$ platí (1).

Definice (6 Systém obyčejných diferenciálních rovnic D 8.2.4)

Nechť $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ je reálná funkce. Potom pro $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \qquad \text{tedy } y_i' = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \tag{2}$$

se nazývá *systém obyčejných diferenciálních rovnic* 1. řádu (rozřešených vůči 1. derivaci).

Definice (5 Řešení obyčejné diferenciální rovnice D 8.2.3)

Funkci $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ nazveme *řešením obyčejné diferenciální rovnice* (1), jestliže

- y má na (a,b) vlastní derivace n-tého řádu
- pro všechna $x \in (a,b)$ platí (1).

Definice (6 Systém obyčejných diferenciálních rovnic D 8.2.4)

Nechť $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ je reálná funkce. Potom pro $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x,\mathbf{y}), \qquad \text{tedy } y_i' = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \tag{2}$$

se nazývá *systém obyčejných diferenciálních rovnic* 1. řádu (rozřešených vůči 1. derivaci).

7.2 Základní existenční věty I

Definice (7 Cauchyova úloha D 8.3.1)

Cauchyovou úlohou pro rovnici $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ na (a, b), kde $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, rozumíme hledání vektorové funkce $\mathbf{y}\colon (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ splňující $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}(x))$ na (a, b) a $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, kde $x_0 \in (a, b)$ a $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ jsou zadané hodnoty, které patří do definičního oboru $\mathbf{F}$.

Definice (8 Prodloužení řešení D 8.3.3)

Nechť $\mathbf{y}_1$ řeší rovnici $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ na intervalu (a_1, b_1) a $\mathbf{y}_2$ ji řeší na intervalu (a_2, b_2). Jestliže $(a_1, b_1) \subsetneq (a_2, b_2)$ a $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$ na (a_1, b_1), řekneme, že $\mathbf{y}_2$ je *prodloužením řešení* $\mathbf{y}_1$ (na interval (a_2, b_2)). Řešení se nazývá *maximální*, jestliže se nedá prodloužit.

7.2 Základní existenční věty I

Definice (7 Cauchyova úloha D 8.3.1)

Cauchyovou úlohou pro rovnici $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ na (a, b), kde $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, rozumíme hledání vektorové funkce $\mathbf{y}\colon (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ splňující $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}(x))$ na (a, b) a $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, kde $x_0 \in (a, b)$ a $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ jsou zadané hodnoty, které patří do definičního oboru $\mathbf{F}$.

Definice (8 Prodloužení řešení D 8.3.3)

Nechť $\mathbf{y}_1$ řeší rovnici $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ na intervalu (a_1, b_1) a $\mathbf{y}_2$ ji řeší na intervalu (a_2, b_2). Jestliže $(a_1, b_1) \subsetneq (a_2, b_2)$ a $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$ na (a_1, b_1), řekneme, že $\mathbf{y}_2$ je *prodloužením řešení* $\mathbf{y}_1$ (na interval (a_2, b_2)). Řešení se nazývá *maximální*, jestliže se nedá prodloužit.

7.2 Základní existenční věty II

Věta (1 Peanova existenční věta V 8.3.5)

Nechť $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá na otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *a* $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. *Pak existuje* $\delta > 0$ *tak, že na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *existuje řešení Cauchyovy úlohy pro systém rovnic* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ *s počáteční podmínkou* $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

Věta (2 Picard–Lindelöfova existenční věta 8.3.6)

Nechť $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá na otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ *a* $\mathbf{F}$ *je na* Ω *lokálně lipschitzovská vzhledem k poslední n-tici proměnných. Pak existuje* $\delta > 0$ *tak, že na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy pro systém rovnic* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ *s počáteční podmínkou* $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

7.2 Základní existenční věty II

Věta (1 Peanova existenční věta V 8.3.5)

Nechť $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá na otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *a* $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$*. Pak existuje* $\delta > 0$ *tak, že na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *existuje řešení Cauchyovy úlohy pro systém rovnic* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ *s počáteční podmínkou* $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$*.*

Věta (2 Picard–Lindelöfova existenční věta 8.3.6)

Nechť $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá na otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*,* $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ *a* $\mathbf{F}$ *je na* Ω *lokálně lipschitzovská vzhledem k poslední n-tici proměnných. Pak existuje* $\delta > 0$ *tak, že na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy pro systém rovnic* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ *s počáteční podmínkou* $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$*.*