Sada příkladů 2/7

Mocninné řady

Určete poloměr konvergence daných mocninných řad a vyšetřete konvergenci na kružnici konvergence ($z \in \mathbb{C}$)

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n^2} (z-1)^n$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$$

   $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2$,
   $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \Big(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\Big)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

8. Vyšetřete konvergenci zobecněné mocninné řady ($x \in \mathbb{R}$)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \Big(\frac{3x}{2+x^2}\Big)^n.$$

   Dokažte, že daná funkce je reálně analytická v počátku a nalezněte její Taylorovu řadu v nule, včetně intervalu konvergence

9. $\sin^2 x$

10. $\sqrt{1+x^2}$

11. $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,\mathrm{d}t.$

Sečtěte funkční řady

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n.$$

Sečtěte číselné řady

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Uvažujte $\operatorname{arctg} x$.

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$$

Uvažujte $(1+x)\mathrm{e}^{-x}-(1-x)\mathrm{e}^{x}$.

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

20. Nalezněte řešení Besselovy rovnice pro $n = 0$ ve tvaru $K_0(x) = \ln x \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s + \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s$.

21. Hledejte řešení Besselovy rovnice $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$ pro $n = \frac{1}{2}$ ve tvaru $x^{\varrho} \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$ s vhodným ϱ.