

Počtení část zkoušky 30.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Spočtete pro $a, b, c > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin^2(ax) + \cos^2(bx) \right)^{\frac{1}{\ln^2(1+cx)}}.$$

2. (7b) Na všech intervalech, kde je to možné, nalezněte primitivní funkci k

$$f(x) = \frac{e^{5x}}{e^{3x} + 1}.$$

3. (9b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

na maximálním možném definičním oboru v \mathbb{R} včetně co nejpřesnějšího načrtnutí grafu funkce. Mělo by se hodit, že

$$\sqrt{e} \sim 1,65.$$

4. (5b) Pro jaký poloměr a výšku bude mít uzavřený válec s daným objemem V nejmenší povrch?

Teoretická část zkoušky 30.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) a) Definujte, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní limitu. Uveďte definici jak pomocí okolí, tak pomocí intervalů.
b) Definujte pojem složená funkce.
c) Formulujte a dokažte, za jakých dodatečných předpokladů (uveďte alespoň dvě různé možnosti) plyne z toho, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ a $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = B.$$

- d) Ukažte (tj. uveďte protipříklad), že bez jistého dodatečného předpokladu (jiného než prázdný definiční obor složené funkce) výše uvedený vztah nemusí platit.
e) Dokažte, že pokud jsou obě výše uvedené funkce v daných bodech spojité, potom je i složená funkce v bodě x_0 spojitá.

2. (8b) a) Definujte pojem f je spojitá v bodě x_0 .
b) Definujte pojem f je spojitá na intervalu I .
c) Definujte pojem f je stejnoměrně spojitá na intervalu I .
d) Definujte pojem f je lipschitzovsky spojitá na intervalu I .

Zjistěte, zda platí (tedy buď tvrzení dokažte, nebo nalezněte protipříklad)

- (i) f je spojitá na $[a, b] \implies f$ je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$
- (ii) f je lipschitzovsky spojitá na $(a, b) \implies f$ je stejnoměrně spojitá na (a, b)
- (iii) f je spojitá na $(a, b) \implies f$ je stejnoměrně spojitá na (a, b)
- (iv) f je spojitá na $[a, b] \implies f$ je lipschitzovsky spojitá na $[a, b]$.

3. (8b) a) Vysvětlete stručně, ale se všemi podstatnými detaily, Darbouxovu definici Riemannova integrálu (pomocí horního a dolního integrálu).
b) Formulujte a dokažte tzv. hlavní větu diferenciálního a integrálního počtu.
c) Definujte zobecněnou primitivní funkci a Newtonův integrál.
d) Spočítejte $\frac{d}{dx} f(x)$, kde

$$f(x) = \int_0^{\sin^6(1+x^{12})} e^{s^6} ds.$$