Početní část zkoušky 14.1.2022

Jméno:

Skupina:

1. (5b) Spočtěte pro libovolné a, $b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\sin^2(ax)+\cos(bx)\Big)^{\frac{x}{\operatorname{tg}^3 x}}.$$

   Vše odůvodněte! Tedy, pokud používáte nějakou vlastnost funkcí, vysvětlete ji, pokud používáte nějakou hlubší větu, ověřte, že jsou splněny její předpoklady.

2. (7b) Nalezněte primitivní funkci k

$$f(x)=\frac{1}{\sin x+\cos x+2}$$

   na celém $\mathbb{R}$.

3. (10b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\ln\big(1+|x^2-x-20|\big)$$

   na maximálním možném definičním oboru v $\mathbb{R}$ včetně co nejpřesnějšího načrtnutí grafu funkce. Pro kreslení grafu by se mohlo hodit, že $\ln(21)\approx 3,04$.

4. (5b) Pro reálné koeficienty a, b, A a B uvažujte funkci

$$f(x)=\begin{cases} Ax+Bx^2 & x\geq 0\\ \cos(bx)-a+\sin^2(ax) & x<0.\end{cases}$$

   a) Pro které hodnoty koeficientů ná funkce f spojitou druhou derivaci na celém $\mathbb{R}$?
   b) Je možno navíc zajistit vhodnou volbou parametrů, aby navíc i třetí derivace byla spojitá na $\mathbb{R}$?

   Pokud používáte nějakou vlastnost funkcí, vysvětlete ji, pokud používáte nějakou hlubší větu, ověřte, že jsou splněny její předpoklady.

Teoretická část zkoušky 14.1.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (i) Definujte, že funkce f má v bodě x_0 derivaci (i nevlastní).
(ii) Ukažte, že pokud má funkce v bodě x_0 vlastní derivace, je v tomto bodě spojitá.
(iii) Uveďte příklad funkce, která má v nějakém bodě nevlastní derivaci a je v tomto bodě spojitá.
(iv) Uveďte příklad funkce, která má v nějakém bodě nevlastní derivaci a není v tomto bodě spojitá.
(v) Formulujte a dokažte tvrzení o derivaci součinu a podílu dvou funkcí.

2. (8b) a) Formulujte a dokažte Darbouxovu větu o nabývání mezihodnot.
b) Definujte pojem Darbouxova vlastnost funkce na intervalu.
c) Uveďte příklad funkce, která je alespoň v jednom bodě nespojitá, a přesto nabývá na daném intervalu všech mezihodnot. Vysvětlete.
d) Dokažte, že pokud má funkce na nějakém intervalu vlastní derivaci, pak tato derivace má Darbouxovu vlastnost.

3. (7b) a) Definujte pojmy primitivní funkce a zobecněná primitivní funkce na otevřeném intervalu.
b) Formulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě.
c) Dokažte, že primitivní funkce i zobecněná primitivní funkce (pokud existují), jsou dány jednoznačně až na aditivní konstantu.
d) Definujte Newtonův integrál funkce přes interval (a, b).
e) Ukažte, že Newtonův integrál nezáporné funkce (pokud existuje) je nezáporný.