(1) Spočtěte v závislosti na parametrech $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

(6b)

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin^2(ax) + \cos^2(bx)\right)^{\frac{1}{\ln^2(1+cx)}}$$

Řešení:

Díky spojitosti fce exp: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ můžeme 1b

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin^2(ax) + \cos^2(bx)\right)^{\frac{1}{\ln^2(1+cx)}} = e^{\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln^2(1+cx)} \ln\left(\sin^2(ax)+\cos^2(bx)\right)}_{L}} \quad 1b$$

Víme

$$\left.\begin{aligned}
\ln(1+cx) &= cx + o(x) \Rightarrow \ln^2(1+cx) = c^2x^2 + o(x^2)\\
\sin(ax) &= ax + o(x) \Rightarrow \sin^2(ax) = a^2x^2 + o(x^2)\\
\cos(bx) &= 1 - \tfrac{1}{2}b^2x^2 + o(x^2) \Rightarrow \cos^2(bx) = 1 - b^2x^2 + o(x^2)
\end{aligned}\right\} 1{,}5b$$

$$\frac{1}{\ln^2(1+cx)} \ln\left(\sin^2(ax)+\cos^2(bx)\right) = \frac{c^2x^2}{\ln^2(1+cx)} \cdot \frac{\ln\left(\sin^2(ax)+\cos^2(bx)\right)}{(a^2-b^2)x^2} \cdot \frac{(a^2-b^2)x^2}{c^2x^2}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{a^2-b^2}{c^2} \quad 1b$$

Proto původní limita je $\underbrace{e^{\frac{a^2-b^2}{c^2}}}_{\lim_{x\to 0} 1^{\frac{1}{\ln^2(1+cx)}} = 1}$ 0,5b přímo, což odpovídá výsledku výše. 1b

Pozn. Je-li $a=b$, pak je ~~třeba udělat rozvoj dál~~

$$\cancel{\begin{aligned}
\sin^2(ax) &= \left(ax - \tfrac{1}{6}a^3x^3 + o(x^3)\right)^2 = a^2x^2 - \tfrac{1}{3}a^4x^4 + o(x^4)\\
\cos^2(bx) &= \left(1 - \tfrac{1}{2}b^2x^2 + \tfrac{1}{4!}b^4x^4 + o(x^4)\right)^2 = 1 - b^2x^2 + \left(\tfrac{1}{4}b^4x^4 + \tfrac{1}{4!}b^4x^4\right) + o(x^4)\\
\Rightarrow (a=b) &\Rightarrow \sin^2(ax) + \cos^2(ax) = 1 + b^4x^4\underbrace{\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4!}-\tfrac{1}{3}\right)}_{\neq 0} + o(x^4)
\end{aligned}}$$

a limita argumentu exponenciely je nula a tak výsledek je 1!

(2) Nalezněte primitivní funkci k

(7b) $$\frac{e^{5x}}{e^{3x}+1}$$

Řešení

1b

$$I = \int \frac{e^{5x}}{e^{3x}+1}\,dx = \begin{bmatrix} e^x = z \\ e^x dx = dz \end{bmatrix} = \int \frac{z^4}{z^3+1}\,dz$$ 0,5b

$$z^4 : (z^3+1) = z - \frac{z}{1+z^3}$$ 0,5

$-(z^4+z)$

$-z$

$$\frac{z}{1+z^3} = \frac{A}{1+z} + \frac{Bz+C}{z^2-z+1}$$

$$A(z^2-z+1) + (Bz+C)(1+z) = z$$

$z := -1$ $\Rightarrow \underbrace{A = -\frac{1}{3}}$

z^2: $A = -B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

z^0: $A = -C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

1,5

$$I = \int z\,dx - \int \frac{z}{1+z^3}\,dz$$ 0,5

0,5b

$$= \frac{1}{2}z^2 + \int \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+z}\,dz - \frac{1}{3}\int \frac{z+1}{z^2-z+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}\ln(1+z) - \frac{1}{6}\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}\,dz - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-z+1}$$ 0,5b

0,5b

$$= \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}\ln(1+z) - \frac{1}{6}\ln(z^2-z+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}\ln(1+z) - \frac{1}{6}\ln(z^2-z+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dz}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

1b

$$= \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}\ln(1+z) - \frac{1}{6}\ln(z^2-z+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

0,5

$$\underbrace{F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}\ln(1+e^x) - \frac{1}{6}\ln(e^{2x}-e^x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}\right) + C}_{x \in \mathbb{R}}$$

(3) Priebeh funkcie (93)

$f(x) = e^{2x-x^2}$ $\quad(\sqrt{e} \approx 1,65)$

$D_f = \mathbb{R}$

spojitá a diferencovateľná na celom def. obore $\quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$ $\Big\}$ 1

$f'(x) = e^{2x-x^2}\cdot(2-2x)$ $\Big\}$ 1 $\quad \Rightarrow R_f = (0, e]$

$\Rightarrow$ nulový bod je $x = 1$

$f''(x) = e^{2x-x^2}\left(-2+(2-2x)^2\right) = e^{2x-x^2}(-2+4-8x+4x^2)$ $\Big\}$ 1

$= 2e^{2x-x^2}(1-4x+2x^2)$

$f(0) = e^0 = 1$

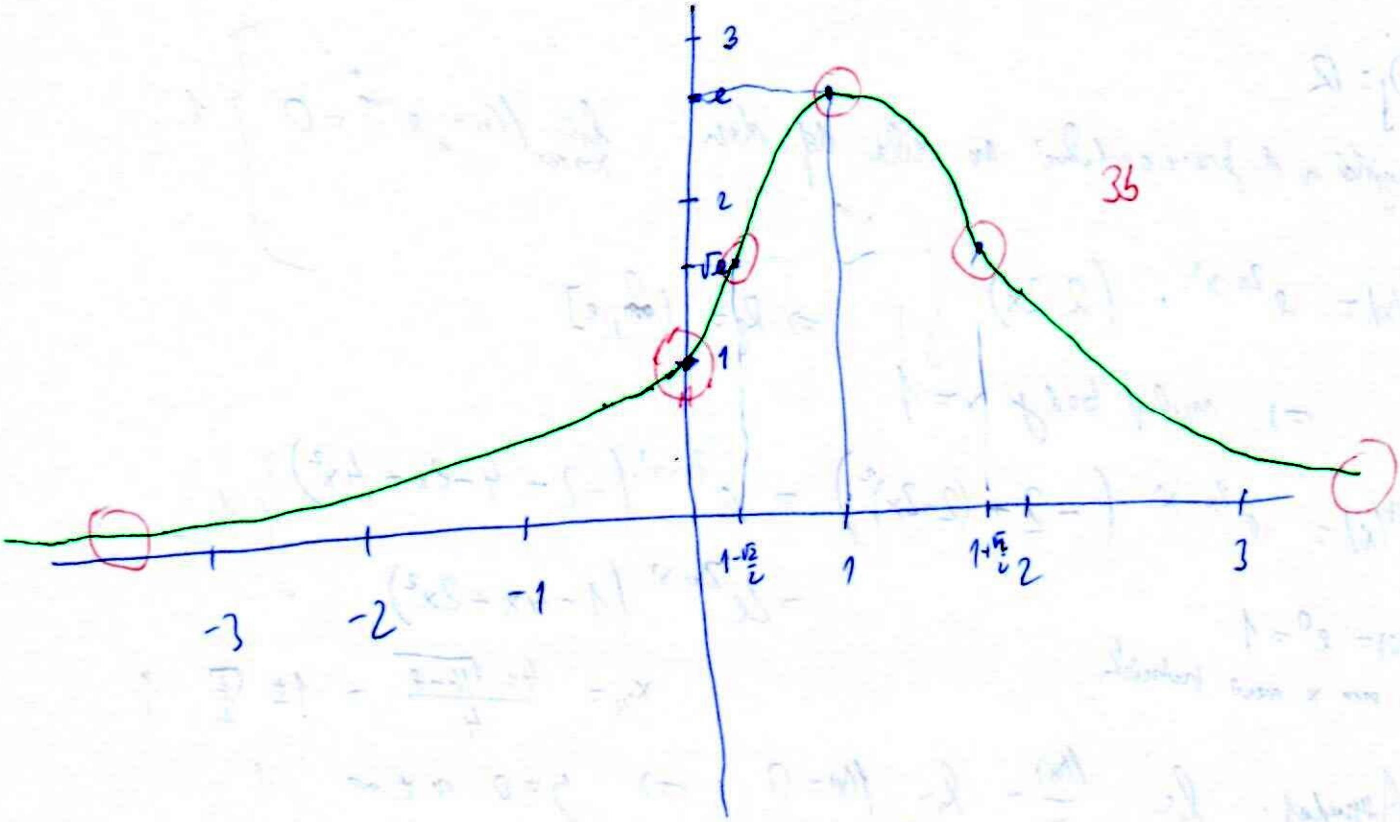
s osou x nemá priesečník

$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1

Asymptoty: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ v $\pm\infty$ 1

	$-\infty$	$(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$	1	$(1, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$	$+\infty$
f	0		$\sqrt{e}\approx 1,65$		$\sqrt{e}$		$\sqrt{e}\approx 1,65$		0
f'	0	+		+		−		−	
f''		+		−		−		+	
		rast., konvex	inflex. bod	rast. konkáv	lok. a glob. maxim	klesá konkáv	infl. bod	klesá konvexná	

2



3b

(9) Pro jaký poloměr a výšku bude mít uzavřený válec s daným
(5b) objemem V nejmenší povrch?

Řešení

$V = \pi r^2 \cdot v \Rightarrow v = \frac{V}{\pi r^2}$ 1b

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot v$ 0,5 b

$S(r;V) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ 0,5 b

$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r^3 = \frac{V}{2\pi}}$ 1b

$S'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0 \Rightarrow$ tedy jistě jde o minimum (jde argumentovat jinak, že $S(r,V) \to +\infty$ pro $r \to 0$ a $r \to +\infty$ $\Rightarrow$ musí být tam minimum)

~~0,5b~~ 1b

$\Rightarrow v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{(2\pi)^2}}} = \boxed{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}$

$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$

1b