MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - LETNÍ SEMESTR 2022–2023
POČETNÍ PŘÍKLADY KE CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

1. Taylorův polynom

Příklad 1.1. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ v bodě $x = 0$ až do řádu x^4 včetně. Spočtěte $f^{(4)}(0)$.

Příklad 1.2. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$ v bodě $x = 0$ až do řádu x^{13} včetně.

Příklad 1.3. Rozložte funkci $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ pro $x > 0$ do řady mocnin $\frac{1}{x}$ až do řádu $\frac{1}{x^3}$ včetně.

Příklad 1.4. Odhadněte absolutní chybu aproximace daných funkcí na daných intervalech:

$$
\begin{aligned}
&e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in [0,1]\\
&\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\\
&\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \qquad x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Příklad 1.5. Spočtěte přibližnou numerickou hodnotu následujících veličin a odhadněte chybu:

$$\sqrt{e}, \qquad \arcsin 0,45, \qquad \log(1,2), \qquad (1,1)^{1,2}.$$

Příklad 1.6. Spočtěte přibližnou numerickou hodnotu následujících veličin s danou přesností:

e s přesností na 10^{-9}, $\sqrt{5}$ s přesností na 10^{-4}, $\log_{10}(11)$ s přesností na 10^{-5}.

Příklad 1.7. S pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4},\\
&\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3},\\
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x,\right)\\
&\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3},\\
&\lim_{x\to \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right].
\end{aligned}
$$

Příklad 1.8. S pomocí Taylorova polynomu vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}\right) - \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}\right].$$

Příklad 1.9. Vyšetřete konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \log(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n})(\arcsin \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Výsledky.

- Příklad 1.1: $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4), \quad -48.$
- Příklad 1.2: $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13}).$
- Příklad 1.3: $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$
- Příklad 1.4: $\frac{3}{(n+1)!}, \quad \frac{1}{3840}, \quad \frac{1}{16}.$
- Příklad 1.5:

$$\begin{aligned}
\sqrt{e} &\approx 1,64872, & |\sqrt{e} - 1,64872| &\le 2 \cdot 10^{-6}, \\
\arcsin 0,45 &\approx 0,46676, & |\arcsin 0,45 - 0,46676| &\le 6 \cdot 10^{-6}, \\
\log(1,2) &\approx 0,182321, & |\log(1,2) - 0,182321| &\le 6 \cdot 10^{-7}, \\
(1,1)^{1,2} &\approx 1,12117, & |(1,1)^{1,2} - 1,12117| &\le 5 \cdot 10^{-6}.
\end{aligned}$$

- Příklad 1.6: $2,718281828, \quad 2,2361, \quad 1,04139.$
- Příklad 1.7: $-\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}.$
- Příklad 1.8: konverguje, diverguje.
- Příklad 1.9: diverguje, konverguje.

2. Vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy

Příklad 2.1. Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 5}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}.$$

Příklad 2.2. Zjistěte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n + 1}\sqrt{2n + 3}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}.$$

Příklad 2.3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n - 2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}).$$

Příklad 2.4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}.$$

Příklad 2.5. Určete pro která $z \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$$

Příklad 2.6. Určete pro která $z \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Výsledky

- Příklad 2.1: Diverguje, diverguje, konverguje, konverguje.
- Příklad 2.2: Konverguje, diverguje, konverguje.
- Příklad 2.3, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 2.3, 2):

Pro každé $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ platí $2^n > 2n$, a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 2.3, 3): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$, a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \left(\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}} \right)}{\frac{2^n}{3^n} \left(\frac{1+(-1)^n \frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n \frac{n}{3^n}} \right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1+(-1)^n \frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n \frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:
(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1,\ k \in \mathbb{N}$;
(2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.
Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 2.3, 4): Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

- Příklad 2.4, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 2.4, 2): Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}} \cdot \frac{4^n+5^n}{3^n+4^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1} = \frac{4}{5} < 1.$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 2.4, 3): Zkoumaná řada je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní.
- Příklad 2.5: $(-1,1)$, $\mathbb{R}$, $\langle -1/2, 1/2\rangle$, $(-3,3)$.
- Příklad 2.6: $(-1,1\rangle$, $\langle -1,1\rangle$, $\langle -1,1\rangle$.

3. Vyšetřování absolutní a neabsolutní konvergence číselných řad s obecnými členy

Příklad 3.1. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3}-1\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{58} n}{\sqrt{n}} \cos\frac{n\pi}{4};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)\left(\sqrt{n^6+n}-n^3\right).$$

Příklad 3.2. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos\frac{\pi n^2}{n+1}.$$

Příklad 3.3. Vyšetřete charakter konvergence řad v závislosti na parametru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^x}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\log a}}{n}, \qquad x \geq 0,\ q \in \mathbb{R},\ a > 1.$$

Příklad 3.4. Nalezněte součet řad

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x| < 1,$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k}, \quad |x|<1,\ |y|<1,$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}.$

Výsledky.

- Cvičení 3.1: (i), (ii), (iii) konvergují neabsolutně, (iv) konverguje absolutně;
- Cvičení 3.2: (i) konverguje neabsolutně, (ii) diverguje, (iii) konverguje neabsolutně, (iv) konverguje neabsolutně;
- Cvičení 3.3: (i) diverguje pro $x = 0$, konverguje neabsolutně pro $0 < x \leq 1$, konverguje absolutně pro $x > 1$;

  (ii) diverguje pro $q \leq \frac{1}{2}$, konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2} < q \leq 1$, konverguje absolutně pro $q > 1$;

  (iii) konverguje neabsolutně pro každé $a > 1$;
- Cvičení 3.4: (i) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$, (ii) $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$, (iii) $e - 1$.

Příklad 4.1. Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^2 n}\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^\alpha+\sin\frac{n\pi}{4}}, \quad \alpha>0, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)\sin(n^2a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n}, \qquad a\in\mathbb{R}.$$

Příklad 4.2. Rozhodněte, pro která $a\in\mathbb{R}$ konverguje absolutně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n}.$$

Příklad 4.3. Dokažte, že pro všechna $a\in\mathbb{R}$ a $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right|<2\sqrt{\pi}.$$

Příklad 4.4. Dokažte následující *Kroneckerovo lemma*: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$. Potom

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}=o\left(\frac{1}{b_n}\right) \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=o\left(b_n\right).$$

Příklad 4.5. Utvořte Cauchyův součin daných řad a spočítejte jeho součet:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

Příklad 4.6. Zkoumejte konvergenci (a eventuální součet) následujících zobecněných řad:

(i) $\displaystyle\sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2}x^iy^k, \quad |x|,|y|<1$

(ii) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{1}{nk(n+k+2)}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2}\frac{n!k!}{(n+k+2)!}$,

(v) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{1}{n^\alpha k^\beta}, \quad \alpha,\beta>0$,

(vi) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{1}{(n+k)^p}, \quad p>0$,

(vii) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}nx^{nk}, \quad |x|<1$.

Výsledky. • Příklad 4.1: (i), (ii), (iii) konvergují, (iv) konverguje pro $\alpha > \frac{1}{2}$ a diverguje pro $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, (v) konverguje, (vi), (vii) a (viii) konvergují pro každé $a \in \mathbb{R}$.

- Příklad 4.2: Řada konverguje absolutně právě tehdy, pokud $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro ostatní $a \in \mathbb{R}$ konverguje neabsolutně.
- Příklad 4.5: (i) $e^{\frac{5}{2}}$, (ii) $-\frac{1}{2}\log 2$, (iii) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.

Příklad 4.7. Dokažte následující *Kummerovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť D_n je posloupnost kladných reálných čísel. Označme

$$p_n = D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Potom

(i) jestliže $\liminf p_n > 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup p_n < 0$ a navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_n}$ diverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 4.8. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Raabeovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Potom

(i) jestliže $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 4.9. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Gaussovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť existuje omezená posloupnost reálných čísel b_n a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{b_n}{n^2}.$$

Potom

(i) jestliže $k > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $k \le 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

5. Primitivní funkce

Příklad 5.1. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int (x+5)^3\,dx, \qquad \int \sin(2x+7)\,dx, \qquad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx;$$
$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \qquad \int \sqrt{1-\sin(2x)}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx;$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

Příklad 5.2. Pomocí jednoduchých substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \sin(\log x)\,\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Příklad 5.3. Pomocí trigonometrických vzorců určete následující primitivní funkce:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \sin^3 x\,dx, \qquad \int \sin^4 x\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}, \qquad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} \qquad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$$

Příklad 5.4. Pomocí metody integrování per partes spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int e^x \sin x\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \log x\,dx;$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad \int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx.$$

Příklad 5.5. Pomocí metody integrování per partes odvoďte formule pro následující primitivní funkce:

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \sin(\log x)\,dx.$$

Příklad 5.6. Pomocí vhodné substituce spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}};$$

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\,dx.$$

Příklad 5.7. Procvičte si lepení primitivních funkcí na následujících příkladech:

$$\int |x|\,dx, \qquad \int e^{-|x|}\,dx, \qquad \int \max\{x, x^2\}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \qquad \int |2x+1|\,dx; \qquad \int (|1+x| - |1-x|)\,dx.$$

Příklad 5.8. Pomocí rozkladu na parciální zlomky spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx, \qquad \int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx, \qquad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4};$$

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+x^6}, \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx.$$

Příklad 5.9. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\,dx, \qquad \int \sqrt{x^2-2x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}};$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Příklad 5.10. Pomocí Eulerových substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}, \qquad \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Příklad 5.11. Na intervalu $(-\pi, \pi)$ nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{(\sin x)|\sin x| + (\cos x)^2}{(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2}\,dx.$$

Příklad 5.12. Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(0, \pi)$ k funkci

$$f(x) = \frac{1}{6\cos^2 x + 4\sin x \cos x + \sin^2 x}.$$

Příklad 5.13. Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu k funkci

$$f(y) = \frac{1}{3\cos^2 y + \sin(2y) + 1}.$$

Příklad 5.14. Spočtěte primitivní funkci na maximálních intervalech, na kterých existuje, k funkci

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x}}{e^{3x} - 1}\, dx.$$

Výsledky.

- Příklad 5.11: Označme

$$I := \int \frac{(\sin x)|\sin x| + (\cos x)^2}{(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2}\, dx.$$

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, a to na intervalech $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, pak po řadě vychází $t \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$ a $t \in (-\infty, 0)$. Tedy

$$I = \begin{cases} \int \frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}\, dt, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \int \frac{dt}{2+t^2} & x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Rozložíme první funkci na parciální zlomky a druhou spočítáme rovnou. U první funkce dostaneme rozklad

$$\frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{2+t^2},$$

uhodneme $A = C = 0$ a dopočítáme $B = 2$, $D = -3$. Celkem dostaneme

$$I = \begin{cases} 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_1, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_2, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_3, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_4, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Nyní spočítáme jednu primitivní funkci na celém intervalu $(-\pi, \pi)$, řekněmě F_0. Nejprve zvolíme konstantu $C_2 = 0$ Konstanty C_1, C_3 a C_4 spočítáme z jednostranných limit funkce F_0 v bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0. Dostáváme

$$C_1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

V bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0 dodefinujeme funkci F_0 tak, aby byla spojitá. Celkem tedy máme

$$F_0(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} - \pi, & x = -\frac{\pi}{2}, \\ 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right), & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right), & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Všechny primitivní funkce na intervalu $(-\pi, \pi)$ jsou tedy tvaru

$$F(x) = F_0(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- Příklad 5.12: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(x)+C$, $x\in(0,\pi)$, kde (například)
$$F_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,(3\operatorname{cotg}x+1)\right)$$
nebo
$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{tg}x+2)\right), & x\in(0,\frac{\pi}{2});\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{tg}x+2)\right)+\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x\in(0,\frac{\pi}{2});\\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$
- Příklad 5.13: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(y)+C$, $y\in(-\infty,\infty)$, kde (například)
$$F_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}y+1}{\sqrt{3}}+\frac{k\pi}{\sqrt{3}}\right), & y\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi);\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+k\right), & y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
- Příklad 5.14:
$$\log|e^x-1|-\frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+e^x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\right),\qquad x\in(-\infty,0)\quad\text{nebo}\quad x\in(0,\infty).$$

6. Určitý integrál

Příklad 6.1. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{4x}+4e^{3x}-e^{2x}-2e^x}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}\,dx.$$

Příklad 6.2. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}.$$

Příklad 6.3. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Příklad 6.4. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_2^\infty\frac{\sqrt{y}-1}{(y+2)(\sqrt{y}+1)\sqrt{y}}\,dy.$$

Příklad 6.5. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t+3\sin t+1}}dt.$$

Příklad 6.6. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x+2}{(\cos(2x)+\sin^2 x)(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}^2x+2\operatorname{tg}x+3)}\,dx.$$

Příklad 6.7. Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{16}^\infty\frac{2y^{\frac{3}{2}}-5y+8\sqrt{y}-1}{\left(y-2\sqrt{y}-3\right)\sqrt{y}\left(y-\sqrt{y}+2\right)}\,dy$$

Výsledky.

- Příklad 6.1: Označme
$$I := \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{4x}+4e^{3x}-e^{2x}-2e^x}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}\,dx.$$

Použijeme substituci $y = e^x$, pak $y \in (0,1)$. Protože $dy = e^x\,dx$, máme

$$I = \int_0^1 \frac{y^3+4y^2-y-2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)}\,dy.$$

Rozložíme integrand na parciální zlomky:

$$\frac{y^3+4y^2-y-2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{C}{2y+1} + \frac{D}{y+1}$$

Použitím cover-up rule, tj. dosazením $y = -\frac{1}{2}$ a $y = -1$ dostaneme ihned $C = D = -1$, pak dosazením například $y = 0$ vypočítáme $B = 0$ a konečně dosazením například $y = 1$ dostaneme $A = 2$. Celkem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{2y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= \left[\log(y^2+1) - \frac{1}{2}\log(2y+1) - \log(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -\frac{1}{2}\log 3. \end{aligned}$$

- Příklad 6.2:
$$\frac{1}{8}\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right)$$
- Příklad 6.4:
$$\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 2\log\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)$$
- Příklad 6.5:
$$\sqrt{5} - 2 + 3\log(5-2\sqrt{5}) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5-2\sqrt{5}} - 1\right)$$
- Příklad 6.6:
$$\frac{1}{4}\log\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
- Příklad 6.7: ∞ (integrál existuje, ale nekonverguje)

7. Konvergence Newtonova integrálu

Příklad 7.1. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)}\,dx; \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx; \quad \int_0^\infty x^p e^{-\sqrt{x}}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^a\,dx; \quad \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^p}\,dx; \quad \int_0^1 x^{ax}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{|\log x|^p}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Příklad 7.2. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:

$$\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^q(1/x)}\,dx.$$

Příklad 7.3. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}\,dx.$$

Příklad 7.4. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \operatorname{tg}^\alpha x \, dx.$$

Příklad 7.5. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Příklad 7.6. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x+1)}{\log(\log(10+x))} \, dx.$$

Příklad 7.7. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty x \cos(x^4) \, dx.$$

Příklad 7.8. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^\alpha} \, dx.$$

Příklad 7.9. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) x^\alpha \, dx.$$

Výsledky.

- Příklad 7.1:
  konverguje; $p, q > 0$; $p > -1$;
  konverguje; $a \in (-1, 1)$; $0 < p + 1 < q$;
  $a \in \mathbb{R}$, $1 < p < 3$; $a \in \mathbb{R}$;
  $a \in (-1, -\frac{1}{2})$; $p > -\frac{1}{2}$.
- Příklad 7.2: $\alpha > 1$; $q < \frac{3}{2}$.
- Příklad 7.3: Integrál konverguje právě tehdy, když platí buď $\alpha < 1 < \beta$ nebo $\beta < 1 < \alpha$.
- Příklad 7.4: Integrál konverguje právě tehdy, když platí buď $-3 < \alpha < 1$.
- Příklad 7.5: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 7.6: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 7.7: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 7.8: Integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (0, 4)$. Integrál absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (1, 4)$.
- Příklad 7.9: Integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-5, 0)$. Integrál absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-5, -1)$.

8. Aplikace určitého integrálu

Příklad 8.1. Spočtěte obsah plochy vymezené křivkami

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Příklad 8.2. Spočtěte obsah plochy vymezené křivkami

$$y^2 = 2x + 1 \quad \text{a} \quad x - y - 1 = 0.$$

Příklad 8.3. Spočtěte obsah plochy vymezené grafem paraboly

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

a jejími tečnami vedenými z bodů $[0, -3]$ a $[3, 0]$.

Příklad 8.4. Spočtěte obsah plochy vymezené parabolami
$$y = x^2 \quad \text{a} \quad y = \sqrt{x}.$$

Příklad 8.5. Spočtěte délku křivky
$$y = a\cosh\frac{x}{a}, \quad x \in [0, b],\ a, b > 0.$$

Příklad 8.6. Spočtěte délku paraboly
$$y^2 = 2px$$
mezi počátkem a některým její bodem.

Příklad 8.7. Spočtěte délku křivky
$$y = \log x, \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}].$$

Příklad 8.8. Spočtěte délku křivky
$$y = \log(1 - x^2), \quad x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Příklad 8.9. Spočtěte délku grafu funkce
$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad x \in [0, 4]\ .$$

Příklad 8.10. Spočtěte objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 8.11. Spočtěte obsah jednotkové sféry v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 8.12. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4}, \qquad x \in [2, 4].$$

Příklad 8.13. Určete objem a povrch pláště tělesa, vzniklého rotací množiny
$$\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y - b)^2 \leq a^2\right\}, \quad (0 < a \leq b),$$
okolo osy x.

Příklad 8.14. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right), \qquad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Příklad 8.15. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), \qquad x \in [2, 4].$$

Příklad 8.16. Spočtěte objem a povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $y = e^x$ kolem osy x, kde $x \in (-\infty, 0)$.

Příklad 8.17. Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Příklad 8.18. Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí
$$y = \cosh x, \qquad x \in [0, a]$$

Příklad 8.19. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblasti
$$M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + 8 \leq 6y\right\}$$
kolem osy x.

Příklad 8.20. Spočtěte objem toru, vzniklého rotací kruhu o poloměru $a > 0$ a středu v bodě $b > a$ kolem osy y.

Příklad 8.21. Spočtěte povrch pláště parabolické mísy, vzniklé rotací parabolického oblouku $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, kolem osy y.

Příklad 8.22. Spočtěte povrch pláště ragbyového míče, vzniklého rotací elipsy $x^2+4y^2=4$ kolem osy y.

Příklad 8.23. Vyšetřete konvergenci následujících číselných řad pomocí integrálního kritéria:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2,$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\frac{n+1}{n-1}.$$

Příklad 8.24. *Těžiště* rovinné oblasti dané nerovnostmi $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ je bod $[\overline{x}, \overline{y}]$, kde

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \overline{y} = \frac{\int_a^b (f(x))^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Najděte těžiště rovinných oblastí, daných následujícími nerovnostmi:

$$-a \le x \le a, \quad 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2};$$
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$x^2+y^2=r^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

Příklad 8.25. Nechť f je spojitá na $[0,1]$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n), dx.$$

Výsledky.

- Příklad 8.1: $2\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{3}$
- Příklad 8.2: $\frac{16}{3}$
- Příklad 8.3: $\frac{9}{4}$
- Příklad 8.4: $\frac{1}{3}$
- Příklad 8.5: $a \sinh \frac{b}{a}$
- Příklad 8.6: $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$
- Příklad 8.7: $1+\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$
- Příklad 8.8: $\log 3 - \frac{1}{2}$
- Příklad 8.9: $\frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}}-1)$
- Příklad 8.10: $\frac{4\pi}{3}$
- Příklad 8.11: 4π
- Příklad 8.12: Označme L hledanou délku křivky. Podle příslušného vzorce je

  $$L = \int_2^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

  kde

  $$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4},$$

  takže

  $$f'(x) = x - \frac{1}{4x},$$

tj.

$$f'(x)^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}.$$

Dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned}
L &= \int_2^4 \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\
&= \int_2^4 \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\
&= \int_2^4 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx \\
&= \int_2^4 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\log x\right]_{x=2}^{x=4} \\
&= 6 + \frac{\log 2}{4}.
\end{aligned}$$

- Příklad 8.13: $V = 2\pi^2 a^2 b$, $S = 4\pi^2 ab$
- Příklad 8.15: $\frac{1}{2}\log\frac{e^4 - e^{-4} - 2}{e^2 - e^{-2} - 2}$
- Příklad 8.16: $\frac{\pi}{2}$
- Příklad 8.17: $6a$
- Příklad 8.18: $\frac{e^a - e^{-a}}{2}$
- Příklad 8.19: $6\pi^2$
- Příklad 8.20: $V = 2\pi^2 a^2 b, \quad S = 4\pi^2 ab$
- Příklad 8.21: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$
- Příklad 8.22: $8\pi\left(1 + \frac{\log(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)$
- Příklad 8.23: konverguje, diverguje, konverguje, konverguje
- Příklad 8.24: $\left[0, \frac{4a}{3\pi}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\pi}{8\log(1+\sqrt{2})},\right]$, $\left[\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right]$
- Příklad 8.25: $f(0)$.

9. Obyčejné diferenciální rovnice

9.1. Základy, separace proměnných.

Příklad 9.1. Uhodněte nějaká řešení následujících diferenciálních rovnic. Najdete všechna řešení?

$$y' = 0; \quad y' = 5; \quad y' = -3x; \quad y' = \sin(2x); \quad y' = -4y.$$

Příklad 9.2. Uhodněte partikulární řešení diferenciálních rovnic, která splňují příslušnou okrajovou podmínku:

$$y' = -3x,\ y(2) = 4; \quad y' = -4y,\ y(0) = 7.$$

Příklad 9.3. Zkuste najít některé obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Nyní najděte partikulární řešení, které splňuje okrajové podmínky

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 3.$$

Příklad 9.4. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$y' = 1 + y^2; \quad y' = \sin x\left(y^2 + 2y + 1\right); \quad y' = \begin{cases} y\log^2(y), & y > 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Načrtněte integrální křivky řešení všech uvedených rovnic!

Příklad 9.5. Jestliže se potkají dvě řešení rovnice
$$y' = f(x, y),$$
kde f je spojitá funkce dvou proměnných, pak na sebe tato dvě řešení navazují hladce. Dokažte!

Rovnici
$$y'x = y \log y$$
řeší například funkce $y \equiv 1$ a $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Tato dvě řešení se potkávají v bodě $[0, 1]$, ale nenavazují na sebe hladce. Proč to není ve sporu se shora uvedeným tvrzením?

Příklad 9.6. Najděte maximální partikulární řešení diferenciální rovnice
$$y' \sin x = y \log y,$$
procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, e]$ a načrtněte jeho graf. Jaký je maximální interval, na který lze toto řešení rozšířit?

Příklad 9.7. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic
$$y' = 10^{x+y}; \quad y' - xy' = b(1 + x^2y'), \qquad y(1) = 1.$$
Načrtněte integrální křivky řešení!

Příklad 9.8. Primitivní *populační model* popisuje vývoj určité populace tak, že růst počtu jedinců P v čase t je přímo úměrný P, takže podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí
$$\frac{dP}{dt} = kP,$$
kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti, závislá na typu populace, kterou studujeme. Dokažte, že pak
$$P(t) = Ae^{kt},$$
kde A je nějaká kladná konstanta daná počátečním stavem populace. Promyslete si sestavení a vyřešení obecné rovnice a pak spočítejte následující příklad.

Bakteriální kultura roste v čase t úměrně počtu jednotlivých bakterií $P = P(t)$. Na začátku je 500 bakterií, po jednom dni máme 800 bakterií. Bude jich po dalších 12 hodinách více než 1000? Vedla by lineární aproximace ke stejnému závěru?

Příklad 9.9. Podstatně lepší populační model než ten, který byl popsán v předcházejícím příkladu, bere v potaz tzv. *maximální kapacitu životního prostředí*. Ta je dána číslem N, což je nejvyšší možný počet členů dané populace, který se ještě v daném životním prostředí uživí. Ověřte si, že podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí
$$\frac{dP}{dt} = kP(N - P).$$
Dokažte, že vývoj stavu populace je pak dán funkcí
$$P(t) = \frac{kNe^{Nt}}{1 + ke^{Nt}},$$
kde k je konstanta úměrnosti. Vyřešte si obecnou rovnici a načrtněte její integrální křivky. Porovnejte s příkladem 9.8! Pak spočítejte následující příklad.

Na ostrov, který skýtá pastvu pro nejvýše 120 králíků, dorazilo 30 králíků. Po prvním roce jich zde žije již 80. Bude jich za další rok více než 100?

Příklad 9.10. Králík roste podle tzv. allometrického zákona
$$\frac{ds}{dv} = k\frac{s}{v},$$
kde s, v označují šířku a výšku králíka a k je konstanta úměrnosti. Na začátku má králík šířku 5 cm a výšku 5 cm. Po nějaké době má králík 10 cm výšky a $5\sqrt{2}$ cm šířky. Králík má k dispozici noru o šířce 12 cm a výšce 24 cm. Určete, zda mu bude dřív úzká nebo nízká.

Příklad 9.11. Brouk Pytlík nemá rád teplotu nižší než 60 mravenčích stupňů. V 8 hodin ráno mravenci zatopí v peci, na níž Pytlík leží, na 110 stupňů, a odejdou do práce. Ve 13 hodin je teplota v místnosti 80 stupňů. Místnost vychládá rychlostí úměrnou rozdílu okamžité teploty v místnosti a venkovní teploty, která je stabilně rovna 20 stupňům. Vydrží Pytlík do 18 hodin, kdy se mravenci vrátí z práce a zatopí?

Příklad 9.12. Popište křivku v rovině, která prochází bodem $[2,3]$ s následující vlastností: úsečka libovolné její tečny, vymezená průsečíky této tečny se souřadnými osami, se půlí v bodě dotyku.

9.2. **Homogenní rovnice.**

Příklad 9.13. Má-li diferenciální rovnice tvar $y' = f(\frac{y}{x})$, lze ji převést substitucí $z = \frac{y}{x}$ na tvar

$$z'(x)x + z(x) = f(z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = y + x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad xy' = \frac{y^2+xy}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} - 1, \quad xy' = y\log\frac{x}{y},\ x, y > 0.$$

Příklad 9.14. Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = xe^{y/x} + y, \quad \left(x^2+y^2\right)y' = 2xy.$$

Příklad 9.15. Řešte diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2, \qquad y' = \frac{x+y}{x-y}, \qquad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

9.3. **Exaktní rovnice.** Má-li diferenciální rovnice tvar

$$h(x,y)y' + f(x,y) = 0 \tag{1}$$

a existuje-li funkce dvou proměnných $u(x,y)$ taková, že

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y), \tag{2}$$

pak se taková rovnice nazývá *exaktní*.

Dosud jsme chápali u jako funkci dvou proměnných. Protože ale $y = y(x)$, můžeme chápat $u = u(x, y(x))$ jako funkci jedné proměnné (x). Pak ji derivujeme neparciálně,tj. $\frac{du}{dx}$. Povšimněme si, že exaktní rovnici (1) lze přepsat ve tvaru $\frac{du}{dx} = 0$ a že všechna řešení této rovnice jsou implicitně popsána pomocí křivek tvaru $u(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Jak rozpoznat, zda je daná rovnice exaktní? Jsou-li funkce h a f spojité, pak k tomu, aby rovnice (1) byla exaktní, musí platit

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Tento vztah lze považovat za test exaktnosti rovnice. Navíc jej lze snadno ověřit.

Jestliže je rovnice exaktní, jak najít funkci u? Můžeme se například pokusit tuto funkci uhodnout. Pokud to nejde, můžeme funkci u získat integrací vztahů (2).

Příklad 9.16. Řešte diferenciální rovnice

$$y'\left(\log(\sin x) - 3y^2\right) + y\operatorname{cotg} x + 4x = 0, \quad y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{y}; \tag{3}$$

$$y'\left(3x^2y^2 + e^y\right) + 2xy^3 + 2 = 0; \tag{4}$$

$$y'\left(x^2\sin(xy) - 2y\right) + \cos(xy) - xy\sin(xy) = 0. \tag{5}$$

Jestliže rovnice není exaktní, můžeme ji někdy převést na exaktní tvar pomocí integračního faktoru. Rovnici (1) vynásobíme zatím neznámou funkcí φ. Aby byla tato nová rovnice exaktní, musí splnit test, tj. musí platit

$$\frac{\partial(h\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial y},$$

tedy

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{6}$$

což je ale parciální diferenciální rovnice pro φ. To je úloha těžší než původní rovnice. Z tohoto důvodu většinou hledáme funkci φ závislou jen na jedné ze dvou proměnných. Pokud např. $\varphi = \varphi(x)$, pak je $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ a (6) získá tvar

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

a to je již snadno řešitelná rovnice pro φ se separovanými proměnnými.

Příklad 9.17. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y' \left(3xy - 6x^2\right) + y^2 - 6xy = 0.$$

Přesvědčte se, že rovnice není exaktní. Hledejte integrační faktor ve tvaru $\varphi = \varphi(y)$ a rovnici vyřešte.

9.4. **Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.**

Příklad 9.18. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + y = y^2 \log x,$$

procházející bodem $[1, \frac{1}{3}]$, a určete jejich definiční obory.

Příklad 9.19. Nalezněte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' + \frac{y}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2x}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right)} \sqrt{y},$$

procházející bodem $[\pi, \pi^4]$ a určete jejich definiční obory. Lze některé z těchto řešení navázat v některém bodě definičního oboru na řešení singulární? Je některé z těchto řešení na svém maximálním definičním oboru omezené?

Příklad 9.20. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + \frac{y}{\log x} = y^3$$

a určete jejich definiční obory. Pak nelezněte všechna maximální řešení procházející bodem $[e, 1]$, určete jejich definiční obory a rozhodněte, zda je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené.

Příklad 9.21. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' + 3xy = y^{\frac{1}{3}} e^{-(x+1)^2}$$

a určete jejich definiční obory. Je některé obecné maximální řešení této rovnice omezené na svém definičním oboru? Pak nalezněte všechna řešení této rovnice, procházející bodem $\left[0, -\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$.

Příklad 9.22. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' - \frac{1}{3} (\operatorname{cotg} x)\, y = (\cos x)^2 \, y^4, \qquad x \in (0, \pi),$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, 2]$ a jejich definiční obory. Nabývá některé z nich někde na svém definičním oboru záporné hodnoty?

Příklad 9.23. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$yy'x + y^2 = \frac{x}{1 - x^3}, \qquad x \in (1, \infty),$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[\sqrt[3]{2}, 0]$ a jejich definiční obory. Je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené?

Příklad 9.24. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y'(1+x^2)\operatorname{arctg} x + 6xy \operatorname{arctg} x = \sqrt[3]{y^4}(1+x^2)$$

a určete jejich definiční obory.

Příklad 9.25. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + 4y = 3xy^2$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[2, -\frac{1}{14}]$ a jejich definiční obory. Je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené?

Příklad 9.26. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'x + y = \frac{1}{2(x^2+1)y}$$

a přesně popište jejich definiční obory. Spočtěte maximální řešení, procházející bodem $[x_0, y_0]$, kde $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\log 2}$ a popište jeho definiční obory.

9.5. **Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu.**

Příklad 9.27. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte fundamentální systém řešení a uhodněte alespoň jedno partikulární řešení.

$$y'' - 5y' + 4y = e^{3x};$$
$$y''' - y'' + y' - y = \sin x;$$
$$y'' - y = e^x\left(x^2+1\right).$$

Návod: Partikulární řešení hledejte po řadě ve tvaru $y = ae^{3x}$, $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ a $y = ae^x x^2 + be^x x + ce^x$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c.

Příklad 9.28. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte reálný fundamentální systém řešení a uhodněte partikulární řešení.

$$y'' + 4y = \cos(nx); \quad y''' - y = x^3 - 1.$$

Návod: Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y = a\sin(nx) + b\cos(nx)$, respektive ve tvaru $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c, d.

Příklad 9.29. Zrekonstruujte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jestliže víte, že její fundamentální systém řešení je

$$[e^x, xe^x]; \quad \left[x, x^2\right].$$

Příklad 9.30. Metodou snižování řádu vyřešte rovnici

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = y''(0) = 1.$$

Návod: Položte $z = y'$.

Příklad 9.31. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení následujících lineárních homogenních diferenciálních rovnic:

$$y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0;$$
$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0;$$
$$y'' + 4y' + 13y = 0;$$
$$y'' + y' - 2y = 0.$$

9.6. **Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu.**

Příklad 9.32. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y = x^3 + \sin x.$$

Příklad 9.33. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x \sin x.$$

Příklad 9.34. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} + 5 \sin x.$$

Příklad 9.35. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = \sin(e^{-x}).$$

Příklad 9.36. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Příklad 9.37. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = \sin x.$$

9.7. **Systémy obyčejných diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu.**

Příklad 9.38. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y. \end{aligned}$$

Příklad 9.39. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y - z \\ y' &= 3x - 4y - 3z \\ z' &= 2x - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 9.40. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y \\ y' &= x + 2z \\ z' &= y - x - z. \end{aligned}$$

Příklad 9.41. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - z \\ y' &= y - x + z \\ z' &= x - y. \end{aligned}$$

Příklad 9.42. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 5y - 2z \\ y' &= -2x - 2y + z \\ z' &= -x - y + z. \end{aligned}$$

Příklad 9.43. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2z - y. \end{aligned}$$

Příklad 9.44. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y + 4z \\ z' &= x - z. \end{aligned}$$

9.8. **Systémy obyčejných diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu.**

Příklad 9.45. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y + z + e^t \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -2x + 3y - z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Příklad 9.46. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= -x + 3z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Příklad 9.47. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^t, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Příklad 9.48. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= 2x + y - 2z. \end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

(ii) Určete množinu všech $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^3$, pro která je maximální řešení uvedené soustavy (x, y, z) vyhovující podmínce $y(0) = [x_0, y_0, z_0]$ konstantní.