

Důkaz (věty 19) Necht' $f \in L^1 \cap L^2$ a $\alpha > 0$.

Chceme: $|\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)| > \alpha\}| \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha}$.

Díky cz-dekompozici píšeme $f = g + b$, přičemž jsou splněna tvrzení (a)–(f) z věty 18.

Pro g platí:

$$|\{ |Tg| > \alpha \}| \stackrel{\text{Čebyšev}}{\leq} \frac{\|Tg\|_2^2}{\alpha^2} \stackrel{(a)}{\leq} C \frac{\|g\|_2^2}{\alpha^2}$$

(připomeňme: C se může měnit)

$$= \frac{C}{\alpha^2} \left(\int_F |g|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{Q_k} (|f|_{Q_k})^2 dx \right),$$

kde značíme $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy$.

Tedy $\left(g = f \text{ na } F \text{ a } |g| \leq \alpha \text{ na } F \right)$

$$|\{ |Tg| > \alpha \}| \leq \frac{C}{\alpha^2} \left(\int_F \alpha |f| + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| \cdot (|f|_{Q_k})^2 \right)$$

$$= \frac{C}{\alpha} \int_F |f| + \frac{C}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|Q_k|} \left(\int_{Q_k} |f| \right)^2$$

(e)-(2)

$$\leq \frac{C}{\alpha} \int_F |f| + \frac{C}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|Q_k|} (C\alpha)^2 \cdot |Q_k|^2$$

$$= \frac{C}{\alpha} \int_F |f| + C \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k|$$

$$\stackrel{(f)-cz}{\leq} \frac{C}{\alpha} \int_F |f| + \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

$$\text{tedy } |\{ |Tg| > \alpha \}| \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Zbývá' Tb. Pro $k \in \mathbb{Z}$ označme

$y_k \dots$ střed krychle Q_k . Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) b_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (K(x-y) - K(x-y_k)) b_k(y) dy,$$

neboť podle (cz) - (d) platí $\int_{\mathbb{R}^n} b_k = 0$.

$$\text{Chceme } |\{ |Tb| > \alpha \}| \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Maíme

$$\{ |Tb| > \alpha \} = \{ x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k : |Tb(x)| > \alpha \}$$

$$\cup \{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k : |Tb(x)| > \alpha \}$$

$$\subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k \cup \{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k : |Tb(x)| > \alpha \}.$$

Platí

$$|\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| \stackrel{(f)-cz}{\leq} C \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Da'le

$$\alpha |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} 3Q_\ell : |Tb(x)| > \alpha\}| \leq (\text{Čebyšev})$$

$$\leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_\ell} |Tb_\ell(x)| dx$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_\ell} \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) b_\ell(y) dy \right| dx$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_\ell} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (k(x-y) - k(x-y_\ell)) b_\ell(y) dy \right| dx$$

$$\leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |b_\ell(y)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_\ell} |k(x-y) - k(x-y_\ell)| dx dy$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} C \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |b_\ell(y)| dy$$

$$\stackrel{(c)-(c2)}{\leq} C \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \alpha |Q_\ell| \stackrel{(f1)-(c2)}{\leq} \frac{C}{\alpha} \alpha \|f\|_1,$$

takže

$$\alpha |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} 3Q_\ell : |Tb(x)| > \alpha\}| \leq C \|f\|_1.$$

celkem

$$\alpha |\{ |TH| > \alpha \}| \leq \alpha |\{ |Tb| + |Tg| > \alpha \}|$$

$$\leq \dots \leq \|f\|_1. \quad \square$$

Poznámka. Necht' T je SIO. Potom T splňuje předpoklady věty 19.

Ověřme (b): Víme, že $\bar{y} \in Q(y, \delta)$ a

$x \in \mathbb{R}^m \setminus Q(y, 3\delta)$, takže

$$|y - \bar{y}| \leq c\delta \text{ a } (c = \sqrt{m})$$

$$|x - \bar{y}| \geq |x - y| - |y - \bar{y}| \geq 3c\delta - c\delta = 2c\delta \geq 2\delta$$

$$\text{takže } |y - \bar{y}| \leq \frac{|x - \bar{y}|}{2}.$$

Tedy dle axiomu (c) pro SIO platí

$$\forall \bar{y} \in Q(y, \delta) \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus Q(y, 3\delta):$$

$$|K(x-y) - K(x-\bar{y})| \leq C \frac{|y - \bar{y}|}{|x - \bar{y}|^{n+1}}.$$

Odtud a z nerovností:

$$|x - y| \leq |x - \bar{y}| + |\bar{y} - y| \leq |x - \bar{y}| + c\delta \leq |x - \bar{y}| \cdot C \quad (C = \frac{3}{2})$$

plyne:

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus Q(y, 3\delta)} |K(x-y) - K(x-\bar{y})| dx$$

$$\leq C |y - \bar{y}| \int_{\mathbb{R}^m \setminus Q(y, 3\delta)} \frac{dx}{|x - \bar{y}|^{m+1}}$$

$$\leq C |y - \bar{y}| \int_{\mathbb{R}^m \setminus Q(y, 3\delta)} \frac{dx}{|x - y|^{m+1}}$$



$$\leq C |y - \bar{y}| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(y, 3\delta)} \frac{dx}{|x - y|^{m+1}}$$

$$\leq C \delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{r^{m+1}} r^{m-1} dr$$

$$= C \delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = C.$$

Tedy axiom (b) pro SIO je splněn.

Otažka: platí (a)? $T_f: T: L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$.

To je známá věta z harmonické analýzy.

Postup: K ... C-z jádro (jádro SIO)

sestojí se temperovaná distribuce

$$\langle \mathcal{K}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^m} K_{\varepsilon}(y) \varphi(y) dy,$$

$$K_\varepsilon = K \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}}$$

dokažte se, že $\|\hat{K}\|_\infty < \infty$.

Potom

$$\|Tf\|_2 \stackrel{\text{Planch.}}{=} \|\hat{Tf}\|_2 = \|\hat{K} \cdot \hat{f}\|_2 \leq \|\hat{K}\|_\infty \cdot \|\hat{f}\|_2 \stackrel{\text{Planch. 2}}{=} \|\hat{K}\|_\infty \cdot \|f\|_2.$$

Důsledek. Necht' T je SIO. Potom $T: L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$
(tedy T je slabého typu $(1,1)$).

OTÁZKA: Jak naladit chybějící odhad na
„opačném konci“?

různé přístupy: $\left. \begin{array}{l} L^2 \rightarrow L^2 \\ L^1 \rightarrow L^{1,\infty} \end{array} \right\} \Rightarrow T: L^p \rightarrow L^p, p \in (1,2),$
1. přístup: Marcinkie

z „adjungovanosti“ dokažeme
 $T: L^p \rightarrow L^p, p \in (2,\infty)$

2. přístup: T lze rozšířit na operátor
splňující $T: L^\infty \rightarrow BMO$,
a lze interpolovat mezi $L^{1,\infty}$ a BMO

3. přístup: obdobně, ale místo $T: L^\infty \rightarrow BMO$

lze dokázat $T: L^\infty \rightarrow \text{weak } L^\infty$,

$$\text{kde } \|f\|_{\text{weak } L^\infty} = \sup_{t \in (0,\infty)} (f^{**}(t) - f^*(t))$$

Co provedeme my? Naučíme se techniky zahrnující:

- good- λ -inequality (převrácená verze),
- operátory sdrůženého slabého typu,
- Calderónův operátor.

Věta 20 (good- λ -odhad pro SIO). Necht' T je SIO.

Potom

$$(Tf)^*(t) \leq C \cdot (Mf)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Tf)^*(2t)$$

pro nějaké $C > 0$ a každé $t \in (0, \infty)$ a každou $f \in \mathcal{D}(T)$,
kde M je Hardyův-Littlewoodův maximální operátor.

Důkaz. Necht' $t \in (0, \infty)$ a necht' $f \in \mathcal{D}(T)$. Označme

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > (Tf)^*(2t)\}.$$

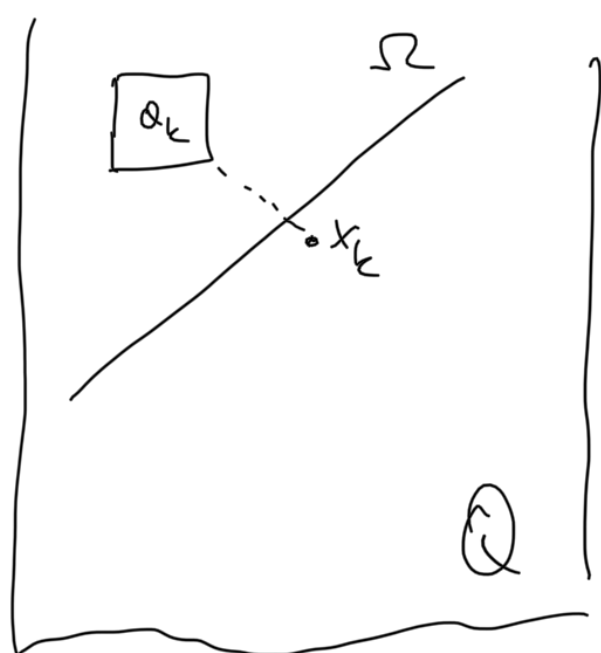
Potom $|E_t| \leq 2t$. Díky regularitě naší množiny nalezneme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou a splňující: $E_t \subset \Omega$ a $|\Omega| \leq 3t$.

Necht' $\{Q_k\}$ jsou Whitneyovy krychle odpovídající Ω .

Dokažeme klíčové tvrzení: $\forall \delta \in (0, \infty) \exists C > 0 \forall k \in \mathbb{N}$:

$$(*) \quad \left| \{x \in Q_k : |Tf(x)| > C \cdot Mf(x) + (Tf)^*(2t)\} \right| \leq \delta |Q_k|.$$

Necht' $k \in \mathbb{Z}$. Nalezneme $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ splňující



$$\text{dist}(x_k, Q_k) \leq 4 \text{diam } Q_k.$$

Označme

$$Q = Q(x_k, 20r_k),$$

kde r_k je délka strany Q_k .

Bude užitečné si uvědomit, že

existuje konstanta B závislá jen na dimenzi n a taková, že $\frac{|Q|}{|Q_k|} \leq B$ (pro každé $k \in \mathbb{Z}$).

Položme $f = g + h$, kde

$$g = f \chi_Q \text{ a } h = f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus Q}.$$

Pro každé $x \in Q_k$ platí (neboť $Q_k \subset Q$)

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = \frac{\|g\|_1}{|Q|}.$$

Tedy pro (zatím neurčeno) $C_2 > 0$ platí

$$|\{x \in Q_k : |Tg(x)| > C_2 Mf(x)\}|$$

$$\leq |\{x \in Q_k : |Tg(x)| > \frac{C_2}{|Q|} \|g\|_1\}|$$

Tsl. typu (1.1)

$$\leq \frac{A}{C_2} \cdot \frac{|Q|}{C_2 \|g\|_1} \cdot \|g\|_1 = \frac{A}{C_2} |Q|,$$

kde $A = \|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}}.$

