MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - ZIMNÍ SEMESTR 2018–2019
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

1. Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. **Logika.** *Logika* je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti **vyvození** závěru z předpokladů.

Výrokem nazveme jakékoli tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Příklady.
- Dnes neprší. (Je výrok. Pravdivost posuďte sami.)
- Beroun je hlavní město USA. (Je výrok, (zatím) nepravdivý.)
- Ahoj! (Není výrok.)
- Kéž by už byl konec hodiny! (Není výrok.)
- Desetinný rozvoj čísla π obsahuje nekonečný počet nul. (Neví se, zda je to pravda, ale je to výrok.)

Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací.

Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A.“, případně „Neplatí A.“ Negaci výroku A značíme $\neg A$.

Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B.“, případně „Platí A a platí B.“, „Platí A i B.“ Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \,\&\, B$.

Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B.“ Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$.

Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A, potom platí (výrok) B.“ Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Místo výroku „Jestliže platí A, potom platí B.“ používáme také následující obraty.
- Jestliže platí výrok A, pak platí výrok B.
- Výrok A implikuje výrok B.
- Z výroku A plyne výrok B.
- Předpokládejme, že platí výrok A, potom platí výrok B.
- Nechť platí výrok A. Potom platí výrok B.
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B.
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A.

Ekvivalencí výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Místo „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ používáme také následující obraty.
- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.
- Výrok A je ekvivalentní s výrokem B.
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B.

Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poznámky.

- Logická spojka *nebo* u disjunkce není vylučující, tj. disjunkce zůstává v platnosti i když platí oba výroky A a B.
- Je-li premisa implikace A nepravdivá, pak implikace platí vždy bez ohledu na platnost závěru B (jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoli výrok).

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku. Je-li a prvkem množiny A, pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A, píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B, potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek.

Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace.

Definice. Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$V(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \dots, M_m$.

Definice. Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } V(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon\ V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

Výrok

$$\textit{Existuje } x \in M, \textit{ pro které platí } V(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon\ V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

Poznámka. Kvantifikátory stejného typu lze libovolně přehazovat, například

$$\forall x\ \forall y\colon V(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall y\ \forall x\colon V(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall x, y\colon V(x,y).$$

Na druhé straně ale kvantifikátory různého typu obecně přehazovat nelze, aniž by se změnil smysl výroku. Výrok

$$\exists x\ \forall y: \quad V(x,y)$$

sice implikuje výrok

$$\forall y\ \exists\ x\colon V(x,y),$$

ale opačná implikace obecně neplatí. Například výrok

$$\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

platí, ale

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

nikoli.

Příklad. Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba x zná příjmení osoby y. Zkoumejte platnost výroků

$$\forall x \in M\ \exists y \in M\colon W(x,y),$$
$$\forall y \in M\ \exists x \in M\colon W(x,y),$$
$$\exists x \in M\ \forall y \in M\colon W(x,y),$$
$$\exists y \in M\ \forall x \in M\colon W(x,y).$$

1.2. **Základní metody důkazů.** V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Všechna další tvrzení jsou potom odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**. **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A, pak platí závěr B. Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,
- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,
- důkaz matematickou indukcí.

konec 2. přednášky (04.10.2018)

Značení. Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \dots$, budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální.

Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li n^2 sudé, potom je i n je sudé.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom je číslo $n(n + 1)$ sudé.

Příklad (Bernoulliova nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Cvičení (zobecněná Bernoulliova nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -2$, platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Při důkazu výroku

$$\forall x \in M \colon V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M, a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x. Tím je pak důkaz proveden.

Při důkazu výroku

$$\exists x \in M \colon V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

Příklad. Dokažte, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí $x + 2 = 0$.

Příklad. Dokažte, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí $e^x - 2 = x$.

Příklad. Dokažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

1.3. **Množiny a množinové operace.**

Definice. Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice. Kartézským součinem množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

konec 3. přednášky (09.10.2018)

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)**.** *Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

1.4. **Zobrazení.**

Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** (nebo krátce **relací**) mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Místo zápisu $[a, b] \in R$ někdy píšeme $a\,R\,b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **relace na** A.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem

$$[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$$

nazýváme **inverzní relací** k relaci R.

Definice. Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon \big(([x, y_1] \in F\ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Poznámka. Je-li F je zobrazení z množiny A do množiny B, pak pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, je určeno jednoznačně. Značíme je symbolem $F(x)$.

Definice. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B. **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\{x \in A; \exists y \in B\colon F(x) = y\},$$

kterou značíme $\mathcal{D}(F)$. **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\{y \in B; \exists x \in A\colon F(x) = y\},$$

kterou značíme $\mathcal{H}(F)$. **Grafem** zobrazení F rozumíme množinu

$$\{[x, F(x)] \in A \times B; x \in \mathcal{D}(F)\},$$

kterou značíme $\operatorname{graf}(F)$.

Značení. Nechť A a B jsou množiny. Potom symbolem

$$F\colon A \to B$$

značíme fakt, že

- F je zobrazení z A do B,
- $A = \mathcal{D}(F)$,
- $\mathcal{H}(F) \subset B$.

Hovoříme o **zobrazení množiny** A do množiny B.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$, $M \subset A$, $P \subset B$.

- **Obrazem** množiny M při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{y \in B; \exists x \in M\colon f(x) = y\},$$
kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem** množiny P při zobrazení f nazveme množinu
$$\{x \in A; f(x) \in P\},$$
kterou značíme $f^{-1}(P)$.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$. Řekneme, že f je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže
$$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y),$$
- **„na“** (**surjektivní**), jestliže
$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon f(x) = y,$$
- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné**), jestliže je zároveň prosté a „na“.

Příklad. Nechť zobrazení f je definováno předpisem $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $A = B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je bijekce. Je-li $A = \mathbb{R}$ a $B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je „na“, ale není prosté. Je-li $A = [0, \infty)$ a $B = \mathbb{R}$, pak $f : A \to B$ je prosté, ale není „na“. Je-li $A = B = \mathbb{R}$ pak $f : A \to B$ není ani prosté, ani „na“.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ a $C \subset A$. Pak zobrazení $g\colon C \to B$ definované předpisem $g\colon x \mapsto f(x)$ pro $x \in C$ nazýváme **restrikcí** (též **zúžením**) zobrazení f na množinu C. Zobrazení g označujeme symbolem $f|_C$.

Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\bigl(f(x)\bigr)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením**, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice. Nechť$f\colon A \to B$ je prosté. Pak **inverzní zobrazení** k f je definováno jako inverzní relace k f. Inverzní zobrazení k f značíme f^{-1}.

Poznámka. Je-li $f\colon A \to B$ prosté, pak

$$f^{-1}\colon f(A) \to A.$$

Poznámka. K neprostému zobrazení nelze definovat inverzní zobrazení.

1.5. **Mohutnost množin.**

Definice. Nechť X je množina. Potom **potenční množinou** množiny X rozumíme množinu všech podmnožin množiny X. Značíme ji symbolem $\mathcal{P}(X)$.

Definice. Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B. Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy platí $A \preceq B$, ale neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina X je **konečná**, jestliže je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, jestliže není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je buď konečná, nebo $X \approx \mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Příklady. Konečné množiny jsou například množiny $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\{x\}$. Nekonečné spočetné množiny jsou například množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$. Nespočetné množiny jsou například množiny $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(0, 1)$, $\{\{a_1, a_2, a_3, \dots\}; a_n \in \{0, 1\},\ n \in \mathbb{N}\}$, $P(\mathbb{N})$.

konec 4. přednášky (11.10.2018)

Věta 1.2 (Cantorova–Bernsteinova)**.** *Nechť X, Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a $Y \preceq X$. Potom $X \approx Y$.*

Lemma (o pevném bodu monotónního zobrazení)**.** *Nechť X je množina a $H\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ splňuje podmínku*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X),\ A \subset B\colon H(A) \subset H(B).$$

Potom existuje množina $C \in \mathcal{P}(X)$ taková, že $H(C) = C$.

Věta 1.3 (Cantorova)**.** *Nechť X je množina. Pak $X \prec P(X)$.*

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) *Každá podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
(b) *Jestliže A je množina a existuje $f\colon A \to \mathbb{N}$ prosté, potom je A spočetná.*
(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
(e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.6. **Reálná čísla.** Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností:

- vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah,
- vztah uspořádání a operací sčítání a násobení,
- vlastnost suprema.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme jej 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R}:\ x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme je $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme jej 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme jej x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ (x \leq y\ \&\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ (x \leq y\ \&\ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ (0 \leq x\ \&\ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Značení. Symbol $x \geq y$ znamená totéž, jako $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**). Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**). Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Řekneme, že množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in A\colon x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\ \exists x \in M : G' < x$,

nazýváme **supremem** množiny M. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\sup M$.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny A, jestliže $a \in A$ a a je horní závorou množiny A. Obdobně definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) A. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max A$ a $\min A$.

konec 5. přednášky (16.10.2018)

III. Vlastnost existence suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Věta 1.5 (existence a jednoznačnost množiny reálných čísel)**.** *Existuje čtveřice* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice* $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ *splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce* $\varphi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ *taková, že pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $g \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in A\colon g \leq x$,
- $\forall g' \in \mathbb{R},\ g < g'\ \exists x \in A\colon x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny A. Má-li množina A infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\inf A$.

Poznámka. Jestliže existuje $\max A$, potom platí $\max A \in A$ (obdobně pro minimum). Jestliže existuje $\sup A$, potom $\sup A$ může a nemusí být prvkem A (obdobně pro infimum). Jestliže existuje $\max A$, potom existuje i $\sup A$ a platí $\max A = \sup A$ (obdobně pro minimum a infimum). Jestliže existuje $\sup A$, potom $\sup A$ je nejmenší dolní závorou množiny A. Jestliže existuje $\inf A$, potom $\inf A$ je největší horní závorou množiny A.

Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** předpisem

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jestliže } x \geq 0, \\ -x, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$$

Poznámka. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(c) $|x| = |-x|$,
(d) $||x|| = |x|$,
(e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$,
(f) $|x| = \max\{x, -x\}$,
(g) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
(h) $|x-y| \geq ||x| - |y||$.

Tvrzení (g) nazýváme **trojúhelníkovou nerovností** reálných čísel.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \\ (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}, \\ (a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}, \\ (-\infty,\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pak množiny (a,b), $(-\infty,b)$, (a,∞) a $(-\infty,\infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a,b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,b]$ a $[a,\infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

Poznámka. Prázdná množina je také intervalem, neboť $(a,a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je intervalem, neboť $[a,a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Množina $A \subset \mathbb{R}$ je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in A\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (x < z < y \Rightarrow z \in A).$$

Věta 1.6 (existence infima)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny A.*

Věta 1.7 (existence celé části reálného čísla)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k+1$.*

Věta 1.8 (Archimédova vlastnost reálných čísel)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Příklady. (a) Je-li $A = [0,1]$, pak $\sup A = \max A = 1$.
(b) Je-li $A = [0,1)$, pak $\sup A = 1$, avšak $\max A$ neexistuje.
(c) Je-li $A = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, pak $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 1$, avšak $\max A$ neexistuje.

konec 6. přednášky (18.10.2018)

Věta 1.9 (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < q < y$.*

Poznámka. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Pak existuje $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $x < q < y$.

Věta 1.10 (existence n-té odmocniny)**.** *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^n = x$.*

1.7. **Komplexní čísla.** Množinou **komplexních čísel** $\mathbb{C}$ rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, přičemž pro komplexní čísla $z_1 = [x_1, y_1]$ a $z_2 = [x_2, y_2]$ definujeme operace sčítání a násobení předpisy

- $z_1 + z_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$,
- $z_1 \cdot z_2 = [x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1]$.

Nechť $z = [x,y] \in \mathbb{C}$. Pak prvek x nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla z a prvek y nazýváme **imaginární částí** z. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla z rozumíme nezáporné reálné číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dále definujeme $0 = [0,0]$, $1 = [1,0]$ a $i = [0,1]$. **Komplexně sdruženým číslem** k z rozumíme číslo $\overline{z} = [x, -y]$. Symbol $-z$ značí číslo $[-x,-y]$ a symbol $\frac{1}{z}$ značí pro $z \neq 0$ (jednoznačně určené) komplexní číslo splňující $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (tedy $\frac{1}{z} = [\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}]$).

2. Limita posloupnosti

2.1. Vlastní limita posloupnosti.

Poznámka. Zobrazení $F\colon A \to B$ často definujeme tak, že pro každé $x \in A$ určíme prvek $F(x) \in B$. V takovém případě používáme zápis $x \mapsto F(x)$, $x \in A$.

Definice. **(Nekonečnou) posloupností** reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme **n-tým členem** této posloupnosti.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ splňující $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ se nazývá **konstantní**.

Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

Definice. **Fibonacciova posloupnost** je zadána následujícím způsobem: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Říkáme, že posloupnost je zadána **rekurentně**.

Příklady. $\{n\}$, $\{\frac{1}{n}\}$, $\{(-1)^n\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$, **look and say sequence**.

Poznámka. Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně $\{a_n\}$, označuje posloupnost, tedy zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ značí **množinu všech členů** této posloupnosti, tedy podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}$, pak známe i $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $\{(-1)^n\}$ a $\{(-1)^{n+1}\}$ jsou různé, ale mají stejnou množinu všech členů, a to $\{-1, 1\}$.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že $\{a_n\}$ **má vlastní limitu**, neboli **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje reálné číslo A takové, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A, tedy

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

Lemma (práce s epsilonem)**.** *Nechť $A, B \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|A - B| < K\varepsilon$, potom $A = B$.*

Věta 2.1 (jednoznačnost vlastní limity posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom $A = B$.*

Značení. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, pak tato limita je určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim a_n$, případně $\lim_{n\to\infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A, pak píšeme $\lim a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A$, nebo $a_n \to A$.

konec 7. přednášky (23.10.2018)

Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\lim a_n = c$.

Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n\}$ je divergentní.

Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ je divergentní.

Příklad. Spočtěte $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Příklad. Spočtěte $\lim \sqrt[n]{n}$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech jejích členů je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech jejích členů je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Příklady. Posloupnosti $\{(-1)^n\}$, $\{\sqrt[n]{n}\}$, $\{\frac{1}{n}\}$ a $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ jsou omezené. Posloupnost $\{n\}$ je omezená zdola, ale nikoli shora.

Věta 2.2 (charakterisace omezenosti posloupnosti)**.** *Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- **rostoucí** jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
- **nerostoucí** jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
- **monotónní**, jestliže je neklesající nebo nerostoucí,
- **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

Příklady. Každá konstantní posloupnost je monotónní (oběma způsoby), není však ryze monotónní. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ není monotónní. Posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}$ a $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ jsou klesající. Posloupnost $\{n\}$ je rostoucí. Posloupnost $\{\sqrt[n]{n}\}$ není monotónní, je však klesající, zanedbáme-li první dva členy.

Poznámka. Výrok „posloupnost je neklesající“ není negací výroku „posloupnost je klesající“ (podobně pro nerostoucí a rostoucí).

Věta 2.3 (charakterisace existence limity posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < K\varepsilon.$$

Věta 2.4 (limita posloupnosti a absolutní hodnota)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim a_n = A$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.*

Poznámka. Z výroku $\lim |a_n| = |A|$ obecně neplyne výrok $\lim a_n = A$. Příkladem je posloupnost $\{(-1)^n\}$, která splňuje $\lim |a_n| = 1$, přičemž $\lim a_n$ neexistuje. Výjimku tvoří případ, kdy $A = 0$, jak ukazuje následující věta.

Věta 2.5 (nulová limita posloupnosti a absolutní hodnota)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.*

Věta 2.6 (vztah konvergence a omezenosti posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ omezená.*

Poznámka. Omezená posloupnost nemusí být konvergentní. Příkladem je posloupnost $\{(-1)^n\}$, která je omezená a divergentní.

konec 8. přednášky (25.10.2018)

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 2.7 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže $\lim a_n = A$, pak $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Poznámka. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé vlastní limity, pak je $\{a_n\}$ divergentní. Označíme-li například $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je tedy divergentní.

Poznámka. Posloupnost $\{(-1)^n n\}$ nemá žádnou konvergentní podposloupnost.

Věta 2.8 (aritmetika vlastních limit)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(c) *jestliže navíc $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.*

Příklad. Spočtěte $\lim \frac{1}{n^2}$.

Příklad. Spočtěte $\lim \frac{n^2+n}{2n^2+1}$.

Věta 2.9 (limita součinu členů omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Poznámka. Tvrzení Věty 2.9 neplyne z Věty 2.8, protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

Příklad. Spočtěte $\lim \frac{(-1)^n}{n}$.

Věta 2.10 (limita posloupnosti a uspořádání)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.*

(a) *Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.*
(b) *Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*

Věta 2.11 (o dvou strážnících)**.** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:*

(a) *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,*
(b) *existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = A$.*

Potom $\lim c_n = A$.

Příklad. Dokažte, že pro každé $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, platí $\lim \sqrt[n]{A} = 1$.

konec 9. přednášky (01.11.2018)

2.2. **Nevlastní limita posloupnosti.**

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ má **limitu rovnou** ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > K.$$

Řekneme, že $\{a_n\}$ má **limitu rovnou** $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou ∞, nebo $-\infty$, říkáme, že má **nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞, pak říkáme, že **diverguje** k ∞. Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

Příklad. Dokažte, že $\{n\}$ má limitu rovnou ∞.

Definice. Rozšířenou reálnou osou nazýváme množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a značíme ji $\mathbb{R}^*$. Na množinu $\mathbb{R}^*$ rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na $\mathbb{R}$ následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$.

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0$.

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R}\colon -\infty < a, a < \infty$,
- $-\infty < \infty$.

Absolutní hodnota je na množině $\mathbb{R}^*$ definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$.

Poznámka. Následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0, \quad \frac{\text{cokoli}}{0}.$$

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

(a) $\forall a \in A\colon a \leq G$,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G\ \exists a \in A\colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Obdobně definujeme **infimum** množiny A.

Poznámka. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema shoduje s pojmem zavedeným dříve. Supremum shora neomezené množiny je rovno ∞ a supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Infimum zdola neomezené množiny je rovno $-\infty$ a infimum prázdné množiny je rovno ∞.

Věta 2.12 (jednoznačnost limity posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom $A = B$.*

Značení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$.

Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru

$$B(c, \varepsilon) = \begin{cases} (c - \varepsilon, c + \varepsilon), & \text{jestliže } c \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}), & \text{jestliže } c = -\infty, \\ (\frac{1}{\varepsilon}, \infty), & \text{jestliže } c = \infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka. Věty o limitě vybrané posloupnosti, o limitě a absolutní hodnotě, o limitě a uspořádání a o dvou strážnících platí v nezměněné podobě i tehdy, připustíme-li nevlastní limity.

Věta 2.13 (nevlastní limita posloupnosti a jednostranná omezenost)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\lim a_n = \infty$, potom je $\{a_n\}$ zdola omezená. Jestliže $\lim a_n = -\infty$, potom je $\{a_n\}$ shora omezená.*

Věta 2.14 (o andělovi)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,*
(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom $\lim c_n = \infty$.

Věta 2.15 (o ďáblovi). *Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,*

(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom $\lim c_n = -\infty$.

Věta 2.16 (změna konečně mnoha členů posloupnosti). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n = b_n$. Potom $\lim b_n = A$.*

Poznámka. Z Věty 2.16 plyne, že změníme-li u dané posloupnosti konečně mnoho členů, pak se konvergenční vlastnosti posloupnosti nezmění.

Věta 2.17 (aritmetika limit). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *jestliže je výraz na pravé straně definován,*

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *jestliže je výraz na pravé straně definován,*

(c) $\lim a_n/b_n = A/B$, *jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$ a výraz na pravé straně definován.*

Poznámka. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze z věty o aritmetice limit vynechat. Například pro posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ platí $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim(-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní. Podobně, nechť $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + c\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = c.$$

konec 10. přednášky (08.11.2018)

Věta 2.18 (nevlastní limita podílu). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$. Nechť $\lim a_n = A$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.*

2.3. **Hlubší věty o limitě posloupnosti.**

Věta 2.19 (limita monotónní posloupnosti). *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

Důsledek. (a) *Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ konvergentní.*

(b) *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí zdola omezená posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ konvergentní.*

Příklad. Označme $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\{a_n\}$ je rostoucí a shora omezená a $\{b_n\}$ je klesající a zdola omezená.

Definice. Číslo e je definováno předpisem

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Věta 2.20 (Bolzanova-Weierstrassova věta). *Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.*

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže je $\{a_n\}$ shora omezená, definujeme

$$b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel, a tedy existuje $\lim b_n$.

Jestliže je $\{a_n\}$ zdola omezená, definujeme

$$c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost reálných čísel, a tedy existuje $\lim c_n$.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Položme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ je shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ není shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ je zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ není zdola omezená.} \end{cases}$$

Místo $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ často píšeme $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

konec 11. přednášky (13.11.2018)

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

(a) Pojmy $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou dobře definovány.

(b) Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$ a $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

(c) Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat. Například pro posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ platí $\limsup a_n = 1$ a $\liminf a_n = -1$. Pro posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}$ platí $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = -\infty$.

(d) Je-li $\{a_n\}$ omezená, pak můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako výše. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$.

Věta 2.21 (o vztahu limity, limes superior a limes inferior). *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.*

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

(a) Platí

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n, \ \liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n.$$

(b) Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \text{ a } \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

konec 12. přednášky (15.11.2018)

Věta 2.22 (o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot). *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.*

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom

(a) $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$,

(b) $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (ve smyslu množiny $\mathbb{R}^*$),

(c) jestliže $\lim a_n = A$ pro nějaké $A \in \mathbb{R}^*$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Definice. Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Poznámka. Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku právě tehdy, když

$$\exists K \in \mathbb{R}, K > 0 \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < K\varepsilon.$$

Věta 2.23 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnosti). *Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.*

Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$.

Příklad. Dokažte, že existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

3. Číselné řady

3.1. Základní pojmy.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **(nekonečnou) řadou**, přičemž číslo a_n je n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazýváme m**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže existuje $\lim_{m\to\infty} s_m$, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **má součet**. **Součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pak nazveme hodnotu $\lim_{m\to\infty} s_m$. Píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ existuje vlastní. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje, nebo existuje a je nevlastní.

konec 13. přednášky (20.11.2018)

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad. Dokažte, že pro $q \in \mathbb{R}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.

Poznámka. Změna konečně mnoha členů nekonečné řady nemá vliv na její konvergenci či divergenci.

Věta 3.1 (nutná podmínka konvergence řady). *Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Potom $\lim a_n = 0$.*

Poznámka. Opačná implikace ve Větě 3.1 neplatí. Například $\lim \frac{1}{n} = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní.

Věta 3.2 (Bolzanova–Cauchyova podmínka konvergence řady). *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ m > n\colon \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Věta 3.3 (řady a aritmetické operace). *Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Poznámka. Množina všech konvergentních řad tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Poznámka. Větu 3.3 je možno zobecnit následujícím způsobem. Nechť mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ součet a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Jestliže je výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.2. **Řady s nezápornými členy.**

Poznámka. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, nebo diverguje k ∞. Jinými slovy, řada s nezápornými členy má vždy součet, který může být konečný, nebo nekonečný.

Věta 3.4 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.*

(a) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
(b) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ je konvergentní.

Věta 3.5 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.*

(a) *Jestliže je $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*
(b) *Jestliže je $A = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(c) *Jestliže je $A = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n(n^2+1)(n+2)}$ je konvergentní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je divergentní.

Věta 3.6 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže*
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$
pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(b) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(c) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(d) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*
(e) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

konec 14. přednášky (22.11.2018)

Poznámka. Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak nelze na základě Cauchyova odmocninového kritéria o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozhodnout. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Věta 3.7 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže*
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$
pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(b) *Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(c) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(d) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$.

Poznámky. (a) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak nelze na základě d'Alembertova podílového kritéria o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozhodnout.

(b) Předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je konvergentní řada
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots,$$

pro kterou je $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Věta 3.8 (Raabeovo kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(b) *Jestliže $\limsup n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Věta 3.9 (kondenzační kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

konec 15. přednášky (27.11.2018)

Věta 3.10 (o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$). *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

3.3. **Řady s obecnými členy.** Používáme následující úmluvu: Jestliže $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n > m$, a $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{j=n}^{m} a_j = 0$.

Lemma (Abelova parciální sumace). *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.*

(a) *Označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k \in \{n, \dots, m\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \tag{1}$$

(b) *Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k \in \{0, \dots, m\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \tag{2}$$

Věta 3.11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

(A) *$\{b_n\}$ je omezená a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*

(D) *$\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.*

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 3.12 (Leibnizova). *Nechť $\{b_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel splňující $\lim b_n = 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ konverguje.*

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

Příklad. Dokažte, že

(a) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$,

(b) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

3.4. **Absolutní konvergence řad.**

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **neabsolutně konvergentní**, jestliže je konvergentní a není absolutně konvergentní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Věta 3.13 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady). *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je konvergentní.*

konec 16. přednášky (29.11.2018)

4. Limita a spojitost funkce

4.1. Limita a spojitost funkce v bodě.

Definice. **Reálnou funkcí jedné reálné proměnné** f (dále jen **funkcí**) rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. **Prstencovým okolím bodu** c nazýváme každou množinu tvaru

$$P(c,\varepsilon) = B(c,\varepsilon) \setminus \{c\},$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou** funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c,\delta): \; f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Lemma (o disjunktních okolích)**.** *Nechť $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 \neq c_2$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že*

$$B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset.$$

Věta 4.1 (jednoznačnost limity funkce)**.** *Nechť f je funkce a $c \in \mathbb{R}^*$. Jestliže $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$ jsou limitami funkce f v bodě c, potom $A_1 = A_2$.*

Značení. Jestliže je $A \in \mathbb{R}^*$ limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, píšeme

$$\lim_{x \to c} f(x) = A.$$

Poznámka. Jestliže existuje $\lim_{x\to c} f(x)$, pak funkce f musí být definována alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu c. Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak f může a nemusí být definována v c. Hodnota $f(c)$ (pokud existuje) nemá na hodnotu limity vliv.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. **Pravým okolím bodu** c rozumíme každou množinu tvaru

$$B_+(c,\varepsilon) = \begin{cases} [c, c+\varepsilon) & \text{jestliže } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{jestliže } c = -\infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Obdobně definujeme **levé okolí** bodu $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. **Pravým prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P_+(c,\varepsilon) = B_+(c,\varepsilon) \setminus \{c\},$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Obdobně definujeme **levé prstencové okolí** bodu $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definice. (a) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

(b) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zleva** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P_-(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Poznámka. Je-li $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, potom f má v c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.

Značení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava nebo zleva rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme po řadě

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to c_-} f(x) = A.$$

Definice. Definujme funkci $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x > 0, \\ 0, & \text{jestliže } x = 0, \\ -1, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$$

Příklad. Dokažte, že $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign}(x) = 1$, $\lim_{x\to 0_-} \operatorname{sign}(x) = -1$ a $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$ neexistuje.

Věta 4.2 (vztah limity funkce a jednostranných limit)**.** *Nechť f je funkce, $c \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$ právě tehdy, když $\lim_{x\to c_+} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = A$.*

Definice. Nechť f je funkce a $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě c, jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (**zleva**), jestliže $\lim_{x\to c_+} f(x) = f(c)$ ($\lim_{x\to c_-} f(x) = f(c)$).

konec 17. přednášky (04.12.2018)

Definice. Funkci D, definovanou předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nazýváme **Dirichletovou funkcí**.

Příklad. Dokažte, že Dirichletova funkce nemá limitu v žádném bodě, a tedy není v žádném bodě spojitá.

Definice. Funkci R, definovanou předpisem

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná}, \\ 0 & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{jestliže } x = 0, \end{cases}$$

nazýváme **Riemannovou funkcí**.

Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce splňuje $\lim_{x\to c} R(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$, a tedy je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.2. **Věty o limitách.**

Věta 4.3 (Heineova věta)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu c. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující*

(a) *$\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \in D(f)$,*
(b) *$\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \neq c$,*
(c) *$\lim_{n\to\infty} x_n = c$,*

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 4.4 (Heineova věta pro spojitost)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na nějakém okolí bodu c. Potom je f spojitá v bodě c právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.*

Věta 4.5 (limita složené funkce)**.** *Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$. Nechť funkce f a g splňují $\lim_{x\to c} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D} f(y) = A$. Nechť platí alespoň jedna z podmínek*

(P) *existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq D$,*
(S) *f je spojitá v bodě D.*

Potom platí

$$\lim_{x\to c} (f(g(x)) = A.$$

Poznámka. Je-li bod D nevlastní, pak je podmínka (P) automaticky splněna.

Věta 4.6 (aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $B \in \mathbb{R}^*$. Nechť f a g jsou funkce a platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B$. Potom*

(a) *$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován,*
(b) *$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$, je-li výraz na pravé straně definován,*
(c) *$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, je-li výraz na pravé straně definován.*

Věta 4.7 (limita funkce a uspořádání)**.** *Nechť $c, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, f, g jsou funkce, $\lim_{x\to c} f(x) = A_1$ a $\lim_{x\to c} g(x) = A_2$.*

(a) *Jestliže $A_1 > A_2$, potom existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $f(x) > g(x)$.*

(b) *Jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $f(x) \le g(x)$, potom $A_1 \le A_2$.*

Poznámka. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce. Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) \neq 0$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $f(x) \neq 0$.

Věta 4.8 (spojitost a aritmetické operace)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť jsou funkce f a g spojité v bodě c. Potom jsou funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě c.*

Věta 4.9 (o dvou strážnících pro funkce)**.** *Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a nechť f, g, h jsou funkce. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A$. Jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí $\forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \le h(x) \le g(x)$, potom existuje $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.*

Věta 4.10 (o andělovi pro funkce)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f, h jsou funkce. Nechť existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon f(x) \le h(x).$$

Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Potom $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.

Věta 4.11 (o ďáblovi pro funkce)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a g, h jsou funkce. Nechť existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon h(x) \le g(x).$$

Nechť $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$. Potom $\lim_{x\to c} h(x) = -\infty$.

Věta 4.12 (nevlastní limita podílu pro funkce)**.** *Nechť $A, c \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, f, g jsou funkce, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to c} f(x) = A$. Jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\forall x \in P(c, \delta)\colon g(x) > 0$, potom $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.*

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **neklesající na** M, jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \le f(y)$,
- **rostoucí na** M jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$,
- **nerostoucí na** M jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \ge f(y)$,
- **klesající na** M, jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) > f(y)$,
- **monotónní na** M, jestliže je neklesající na M nebo nerostoucí na M,
- **ryze monotónní na** M, jestliže je rostoucí na M, nebo klesající na M.

Věta 4.13 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť funkce f je monotónní na (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:*

- *je-li f na (a, b) neklesající, pak*
$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf\{f(x); x \in (a, b)\}, \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup\{f(x); x \in (a, b)\},$$
- *je-li f na (a, b) nerostoucí, pak*
$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup\{f(x); x \in (a, b)\}, \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \inf\{f(x); x \in (a, b)\}.$$

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **shora omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\colon f(x) \le K$,
- **zdola omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\colon f(x) \ge K$,
- **omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\colon |f(x)| \le K$.

Věta 4.14 (vlastní limita funkce a omezenost)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, f je funkce a existuje vlastní $\lim_{x\to c} f(x)$. Potom existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.*

4.3. **Elementární funkce.**

Definice. **Exponenciální funkce** je definována předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Funkce **logaritmus** je definována předpisem $\log = \exp^{-1}$.
Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ je výraz a^b definován předpisem

$$a^b = \exp(b \log(a)).$$

konec 19. přednášky (11.12.2018)

Věta 4.15 (základní vlastnosti exponenciální funkce)**.** *Funkce* exp *je dobře definovaná a splňuje*

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,
(E2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Poznámka. Funkce exp je rostoucí na $\mathbb{R}$ a splňuje $\exp(0) = 1$ a $\exp(1) = e$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x) = e^x$ a $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$.

Definice. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x+a) = f(x-a) = f(x)$.

Definice. Funkce **sinus** a **kosinus** značíme sin a cos a definujeme předpisy

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Věta 4.16 (základní vlastnosti sinu a kosinu)**.** *Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a platí:*

(S1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
(S2) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
(S3) $\sin(0) = 0$ *a existuje kladné číslo* π *takové, že* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ *a* sin *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$,
(S4) sin *je lichá funkce a* cos *je sudá funkce,*
(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkce **tangens** a **kotangens** značíme tg a cotg a definujeme předpisy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Definice. Cyklometrické funkce arkussinus, **arkuskosinus**, **arkustangens** a **arkuskotangens** značíme arcsin, arccos, arctg a arccotg a definujeme předpisy

$$\begin{aligned}\arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1},\\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},\\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1},\\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

4.4. **Funkce spojité na intervalu.**

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli interval, který obsahuje nekonečně mnoho bodů). Řekneme, že funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud je tento prvkem J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud je tento prvkem J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

Věta 4.17 (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) > f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(b), f(a))$ existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = y$.*

Poznámka. Tvrzení Věty 4.17 platí i v případě, kdy $f(a) < f(b)$.

Věta 4.18 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť J je interval. Nechť funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J. Potom je množina $f(J)$ interval.*

konec 20. přednášky (13.12.2018)

Definice. Nechť f je funkce, $M \subset \mathcal{D}(f)$ a $x \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \le f(x) \quad (\forall y \in M\colon f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (**bodem minima**) funkce f na M.

Lemma (o konvergenci k supremu)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $G = \sup M$. Potom existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků M splňující $\lim x_n = G$.*

Věta 4.19 (existence extrémů)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je funkce spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima i minima.*

Věta 4.20 (vztah spojitosti a omezenosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je funkce spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.*

Věta 4.21 (spojitost inverzní funkce)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

5. Derivace

5.1. **Základní vlastnosti.**

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce** f **v bodě** a předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky. (a) Mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace funkce } f \text{ v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}, \text{ tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}, \text{ tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Platí

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl. Obdobné rovnosti platí pro jednostranné derivace.

(c) Jestliže existuje $f'(a)$ (vlastní nebo nevlastní), pak existuje okolí bodu a, na němž je funkce f definovaná. Obdobné tvrzení platí pro jednostranné derivace.

(d) Derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ existuje právě tehdy, když v a existuje derivace zprava i zleva a rovnají se.

konec 21. přednášky (18.12.2018)

Značení. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$, a pro každé $x \in M$ existuje vlastní $f'(a)$. Potom definujeme zobrazení $f': M \to \mathbb{R}$ předpisem $f': x \mapsto f'(x)$.

Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte $f'(a)$, pokud existuje.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte $f'(a)$, pokud existuje.

Příklad. Nechť $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $f'(0)$, pokud existuje.

Příklad. Spočtěte $\operatorname{sign}'(0)$, pokud existuje.

Věta 5.1 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f'(a)$. Potom je f v bodě a spojitá.*

Věta 5.2 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f a g jsou funkce a existují $f'(a)$ a $g'(a)$.*

(a) *Platí*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Jestliže je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) *Jestliže je funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Poznámka. Předpoklady Věty 5.2 není možné vynechat. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Potom $f'(0) = \infty$, $g'(0) = -\infty$, ale $(f + g)'(0)$ neexistuje. Ani $(fg)'(0)$ neexistuje, přestože výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ je definován.

Věta 5.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f, g jsou funkce, g je spojitá v bodě a a existují $g'(a)$ a $f'(g(a))$. Potom platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

konec 22. přednášky (20.12.2018)

Poznámka. Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.3 nelze vynechat. Položme $f(y) = |y|$ pro $y \in \mathbb{R}$ a

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Potom $(f \circ g)'(0)$ neexistuje, ale výraz $f'(g(0))\, g'(0)$ je definován.

Značení. Nechť J je interval. Potom symbolem $\operatorname{Int} J$ značíme množinu všech vnitřních bodů J.

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť J je interval, $a \in \operatorname{Int} J$, f je ryze monotónní a spojitá funkce na J a existuje $f'(a)$. Označme $b = f(a)$.*

(a) *Jestliže $f'(a) \neq 0$, potom $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*
(b) *Jestliže $f'(a) = 0$ a f je rostoucí, potom $(f^{-1})'(b) = \infty$.*
(c) *Jestliže $f'(a) = 0$ a f je klesající, potom $(f^{-1})'(b) = -\infty$.*

Poznámka.

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\log'(x) = \frac{1}{x}$ pro každé $x \in (0, \infty)$,
- $\sin'(x) = \cos(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos'(x) = -\sin(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\operatorname{cotg}'(x) = \frac{-1}{\sin(x)^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro každé $x \in (-1, 1)$,
- $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro každé $x \in (-1, 1)$,
- $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Nechť f je funkce, $M \subset \mathcal{D}(f)$ a $a \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě a **lokálního maxima** (**lokálního minima**, **ostrého lokálního maxima**, **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $y \in B(a, \delta) \cap M$ platí $f(y) \leq f(a)$ ($f(y) \geq f(a)$, $f(y) < f(a)$, $f(y) > f(a)$). Bodem **(ostrého) lokálního extrému** budeme rozumět bod (ostrého) lokálního maxima či minima. Není-li specifikována množina M, pak jsou všechny extrémy funkce uvažovány vzhledem k jejímu definičnímu oboru.

Věta 5.5 (nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť f je funkce, a je bodem lokálního extrému f a existuje $f'(a)$. Potom $f'(a) = 0$.*

5.2. **Věty o střední hodnotě.**

Věta 5.6 (Rolleova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je funkce spojitá na $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

Věta 5.7 (Lagrangeova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je funkce spojitá na $[a, b]$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

konec 23. přednášky (3.1.2019)

Věta 5.8 (Cauchyova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f, g jsou funkce spojité na $[a, b]$, pro každé $x \in (a, b)$ existují $f'(x)$ a $g'(x)$ a pro každé $x \in (a, b)$ je $g'(x)$ vlastní a nenulová. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť J je interval, f je funkce spojitá na J a pro každé $x \in \operatorname{Int} J$ platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) \leq 0$). Potom je f rostoucí (neklesající, klesající, nerostoucí) na J.*

Věta 5.10 (L'Hospitalova pravidla)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Předpokládejme, že buď $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$. Potom*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 5.10 platí i pro limitu zleva, a tedy i pro limitu.

Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Poznámka. Předpoklady Věty 5.10 nelze vynechat, například $\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} \neq \frac{2}{3}$.

Věta 5.11 (o limitě derivací)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f je funkce spojitá zprava v a, existuje $\lim_{x\to a_+} f'(x)$ a f je spojitá zprava v a. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} f'(x)$.*

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 5.11 platí i pro derivaci zleva, a tedy i pro derivaci.

Poznámka. Předpoklad spojitosti ve Větě 5.11 nelze vynechat. Například $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign}'(x) = 0$, ale $\operatorname{sign}'_+(0) = \infty$.

5.3. **Konvexní a konkávní funkce, inflexní body.**

Definice. Nechť J je interval, f je funkce a $J \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **konvexní** na J, jestliže
$$\forall x, y \in J\ \forall \lambda \in [0,1]:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **konkávní** na J, jestliže
$$\forall x, y \in J\ \forall \lambda \in [0,1]:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konvexní** na J, jestliže
$$\forall x, y \in J, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konkávní** na J, jestliže
$$\forall x, y \in J, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** *Nechť J je interval, f je funkce a $J \subset \mathcal{D}(f)$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(a) *f je konvexní na J,*
(b) $\forall x, y, z \in J,\ x < y < z$: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$,
(c) $\forall x, y, z \in J,\ x < y < z$: $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$,
(d) $\forall x, y, z \in J,\ x < y < z$: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Obdobná tvrzení platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Věta 5.12 (konvexita a jednostranné derivace)**.** *Nechť J je interval a f je konvexní funkce na J. Potom pro každé $a \in \operatorname{Int} J$ existují vlastní $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.*

Věta 5.13 (konvexita a spojitost)**.** *Nechť J je interval a f je konvexní funkce na J. Potom pro každé $a \in \operatorname{Int} J$ je f spojitá v a.*

konec 24. přednášky (8.1.2019)

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbb{R}$. **Druhou derivací** f v a nazýváme hodnotu

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje. Jestliže $M \subset \mathbb{R}$ a pro každé $x \in M$ existuje vlastní $f''(x)$, potom definujeme zobrazení $f''\colon M \to \mathbb{R}$ předpisem $f''\colon x \mapsto f''(x)$. Obdobně pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme **n-tou derivací** funkce f (obvykle značíme $f^{(n)}$).

Věta 5.14 (druhá derivace a konvexita)**.** *Nechť J je interval, f je spojitá funkce na J a f' je spojitá na $\operatorname{Int} J$. Jestliže f' je rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na $\operatorname{Int} J$, potom je f ryze konvexní (ryze konkávní, konvexní, konkávní) na J. Speciálně jestliže pro každé $x \in \operatorname{Int} J$ platí $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$, $f''(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$) na $\operatorname{Int} J$, potom je f ryze konvexní (ryze konkávní, konvexní, konkávní) na J.*

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **inflexní bod** f, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že buď

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \ \&\ \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) < f(a) + f'(a)(x-a),$$

nebo

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \ \&\ \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) > f(a) + f'(a)(x-a).$$

Věta 5.15 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, existuje $f''(a)$ a $f''(a) \neq 0$. Potom a není inflexním bodem f.*

Poznámka. Tvrzení Věty 5.15 nelze obrátit. Položme $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Potom $f''(0) = 0$, ale 0 není inflexním bodem f.

Věta 5.16 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c \in (a,b)$, f je funkce, f' je spojitá na (a,b) a platí buď*

$$\forall x \in (a,c)\colon f''(x) > 0 \ \&\ \forall x \in (c,b)\colon f''(x) < 0,$$

nebo

$$\forall x \in (a,c)\colon f''(x) < 0 \ \&\ \forall x \in (c,b)\colon f''(x) > 0.$$

Potom c je inflexním bodem f.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Řekneme, že f má v ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0.$$

Obdobně definujeme asymptotu v $-\infty$.

Věta 5.17 (tvar asymptoty)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom f má asymptotu $ax + b$ v ∞ právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \& \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b.$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v $-\infty$.

konec 25. přednášky (10.1.2019)