První přednáška z analýzy

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

02.10. 2018

Na začátek jeden motivační citát

Na začátek jeden motivační citát

Odposlechnuto na matfyzu:

Na začátek jeden motivační citát

Odposlechnuto na matfyzu:

Milý Bože, kdyby mi zbývala už jen jediná hodina života, dej, ať ji mohu strávit na přednášce z matematické analýzy. Pak mi bude tato hodina připadat jako věčnost.

(student, jenž si nepřál být jmenován)

Představení přednášejícího

Představení přednášejícího

Luboš Pick

Jak nalézt přednášejícího?

Jak nalézt přednášejícího?

Někdy to není snadné . . .

Jak nalézt přednášejícího?

Někdy to není snadné . . .

Jak nalézt přednášejícího?

Jak nalézt přednášejícího?

. . . ale většinou ano:

Jak nalézt přednášejícího?

. . . ale většinou ano:

- KMA MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8

Jak nalézt přednášejícího?

. . . ale většinou ano:

- KMA MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8
- druhé patro, č. dveří K 286 (hned vedle K1)

…ale většinou ano:

- KMA MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8
- druhé patro, č. dveří K 286 (hned vedle K1)
- 221 913 264

Jak nalézt přednášejícího?

…ale většinou ano:

- KMA MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8
- druhé patro, č. dveří K 286 (hned vedle K1)
- 221 913 264
- pick@karlin.mff.cuni.cz

Jak nalézt přednášejícího?

…ale většinou ano:

- KMA MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8
- druhé patro, č. dveří K 286 (hned vedle K1)
- 221 913 264
- pick@karlin.mff.cuni.cz
- http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼pick/

Jak nalézt přednášejícího?

…ale většinou ano:

- KMA MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8
- druhé patro, č. dveří K 286 (hned vedle K1)
- 221 913 264
- pick@karlin.mff.cuni.cz
- http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/
- konsultační hodiny kdykoli po domluvě

FAQ

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, proseimináři a zkouškách z matematické analýzy?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, prosemináři a zkouškách z matematické analýzy?
- Jsou na to skripta?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, prosemináři a zkouškách z matematické analýzy?
- Jsou na to skripta?
- Co když neudělám zkoušku?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, prosemináři a zkouškách z matematické analýzy?
- Jsou na to skripta?
- Co když neudělám zkoušku?
- Co když neudělám zkoušku podruhé?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, proseminári a zkouškách z matematické analýzy?
- Jsou na to skripta?
- Co když neudělám zkoušku?
- Co když neudělám zkoušku podruhé?
- Co když neudělám zkoušku potřetí, pošesté, . . . ?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, prosemináři a zkouškách z matematické analýzy?
- Jsou na to skripta?
- Co když neudělám zkoušku?
- Co když neudělám zkoušku podruhé?
- Co když neudělám zkoušku potřetí, pošesté, . . . ?
- K čemu mi bude matematické vzdělání?

FAQ

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, prosemináři a zkouškách z matematické analýzy?
- Jsou na to skripta?
- Co když neudělám zkoušku?
- Co když neudělám zkoušku podruhé?
- Co když neudělám zkoušku potřetí, pošesté, ...?
- K čemu mi bude matematické vzdělání?
- K čemu mi bude znalost matematické analýzy?

Jaká je úloha matematika ve společnosti?

Z knihy Davida Achesona

Z knihy Davida Achesona

Historka “V balóně”

Historka “V balóně” (nemáme obrázek).

Ze skutečnosti

Historka Milana Bendy

Ze skutečnosti

Historka Milana Bendy (nemáme obrázek).

Co když nedodělám matfyz?

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr
8) **Leon Trockij**, revolucionář

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr
8) **Leon Trockij**, revolucionář
9) **Sir Christopher Wren**, architekt

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr
8) **Leon Trockij**, revolucionář
9) **Sir Christopher Wren**, architekt
10) **Igor Němec**, primátor

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr
8) **Leon Trockij**, revolucionář
9) **Sir Christopher Wren**, architekt
10) **Igor Němec**, primátor
11) **Ivo Svoboda**, ministr

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr
8) **Leon Trockij**, revolucionář
9) **Sir Christopher Wren**, architekt
10) **Igor Němec**, primátor
11) **Ivo Svoboda**, ministr
12) **Eamon de Valera**, prezident

(Částečným) matematickým vzděláním oplývali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr
8) **Leon Trockij**, revolucionář
9) **Sir Christopher Wren**, architekt
10) **Igor Němec**, primátor
11) **Ivo Svoboda**, ministr
12) **Eamon de Valera**, prezident
13) **Bram Stoker**, spisovatel

Čím se zabýváme v matematické analýze?

- popisujeme procesy obsahující *pohyb* nebo *změnu*

- popisujeme procesy obsahující *pohyb* nebo *změnu*
- krotíme nekonečno

- popisujeme procesy obsahující *pohyb* nebo *změnu*
- krotíme nekonečno

Jak někoho přesvědčit, že je to k něčemu dobré?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?
- Jak dlouho bude koncentrace léku v pacientově krvi na účinné úrovni?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?
- Jak dlouho bude koncentrace léku v pacientově krvi na účinné úrovni?
- Jak se rádiové vlny pohybují prostorem?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?
- Jak dlouho bude koncentrace léku v pacientově krvi na účinné úrovni?
- Jak se rádiové vlny pohybují prostorem?
- Proč se epidemie šíří nejprve rychle a pak pomalu?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?
- Jak dlouho bude koncentrace léku v pacientově krvi na účinné úrovni?
- Jak se rádiové vlny pohybují prostorem?
- Proč se epidemie šíří nejprve rychle a pak pomalu?
- Jak se ujistit, že v bouři nespadne most?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?
- Jak dlouho bude koncentrace léku v pacientově krvi na účinné úrovni?
- Jak se rádiové vlny pohybují prostorem?
- Proč se epidemie šíří nejprve rychle a pak pomalu?
- Jak se ujistit, že v bouři nespadne most?

Algebra a geometrie se hodí k popisu vztahů mezi statickými objekty.

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky.

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?
- Jak dlouho bude koncentrace léku v pacientově krvi na účinné úrovni?
- Jak se rádiové vlny pohybují prostorem?
- Proč se epidemie šíří nejprve rychle a pak pomalu?
- Jak se ujistit, že v bouři nespadne most?

Algebra a geometrie se hodí k popisu vztahů mezi statickými objekty. My potřebujeme nové matematické operace, ktere umí změřit míru změny.

Úloha o princezně a housence

Úloha o princezně a housence

ÚLOHA: *Princezna proběhne dveřmi, které se zabouchnou a přiskřípnou její závoj. Princezna si toho nevšimne a běží dál rychlostí V. Závoj je nekonečně pružný a při běhu se neustále natahuje. Na závoji sedí housenka a pohybuje se po něm směrem k princezně rychlostí v.*

ÚLOHA: *Princezna proběhne dveřmi, které se zabouchnou a přiskřípnou její závoj. Princezna si toho nevšimne a běží dál rychlostí V. Závoj je nekonečně pružný a při běhu se neustále natahuje. Na závoji sedí housenka a pohybuje se po něm směrem k princezně rychlostí v.*

OTÁZKA: *Dožene housenka princeznu nebo ne?*

ÚLOHA: *Princezna proběhne dveřmi, které se zabouchnou a přiskřípnou její závoj. Princezna si toho nevšimne a běží dál rychlostí V. Závoj je nekonečně pružný a při běhu se neustále natahuje. Na závoji sedí housenka a pohybuje se po něm směrem k princezně rychlostí v.*

OTÁZKA: *Dožene housenka princeznu nebo ne?*

MOŽNÁ ŘEŠENÍ:

Úloha o princezně a housence

ÚLOHA: *Princezna proběhne dveřmi, které se zabouchnou a přiskřípnou její závoj. Princezna si toho nevšimne a běží dál rychlostí V. Závoj je nekonečně pružný a při běhu se neustále natahuje. Na závoji sedí housenka a pohybuje se po něm směrem k princezně rychlostí v.*

OTÁZKA: *Dožene housenka princeznu nebo ne?*

MOŽNÁ ŘEŠENÍ:

- **ANO**, dožene

Úloha o princezně a housence

ÚLOHA: *Princezna proběhne dveřmi, které se zabouchnou a přiskřípnou její závoj. Princezna si toho nevšimne a běží dál rychlostí V. Závoj je nekonečně pružný a při běhu se neustále natahuje. Na závoji sedí housenka a pohybuje se po něm směrem k princezně rychlostí v.*

OTÁZKA: *Dožene housenka princeznu nebo ne?*

MOŽNÁ ŘEŠENÍ:

- **ANO**, dožene
- **NE**, nedožene

Úloha o princezně a housence

ÚLOHA: *Princezna proběhne dveřmi, které se zabouchnou a přiskřípnou její závoj. Princezna si toho nevšimne a běží dál rychlostí V. Závoj je nekonečně pružný a při běhu se neustále natahuje. Na závoji sedí housenka a pohybuje se po něm směrem k princezně rychlostí v.*

OTÁZKA: *Dožene housenka princeznu nebo ne?*

MOŽNÁ ŘEŠENÍ:

- **ANO**, dožene
- **NE**, nedožene
- výsledek **závisí na rychlostech** v a V

Poučení

Poučení

Tuto úlohu nelze vyřešit žádnou fyzikální úvahou.

Poučení

Tuto úlohu nelze vyřešit žádnou fyzikální úvahou.

Bez matematiky to prostě nejde!!

Poučení

Tuto úlohu nelze vyřešit žádnou fyzikální úvahou.

Bez matematiky to prostě nejde!!

CHCETE VĚDĚT, JAK TO DOPADNE?

Poučení

Tuto úlohu nelze vyřešit žádnou fyzikální úvahou.

Bez matematiky to prostě nejde!!

CHCETE VĚDĚT, JAK TO DOPADNE?

JDĚTE DO

Poučení

Tuto úlohu nelze vyřešit žádnou fyzikální úvahou.

Bez matematiky to prostě nejde!!

CHCETE VĚDĚT, JAK TO DOPADNE?

JDĚTE DO TŘEŤÁKU!

Poučení

Tuto úlohu nelze vyřešit žádnou fyzikální úvahou.

Bez matematiky to prostě nejde!!

CHCETE VĚDĚT, JAK TO DOPADNE?

JDĚTE DO TŘEŤÁKU!

Naučíte se diferenciální rovnice.

Bernoulliova úloha

Bernoulliova úloha

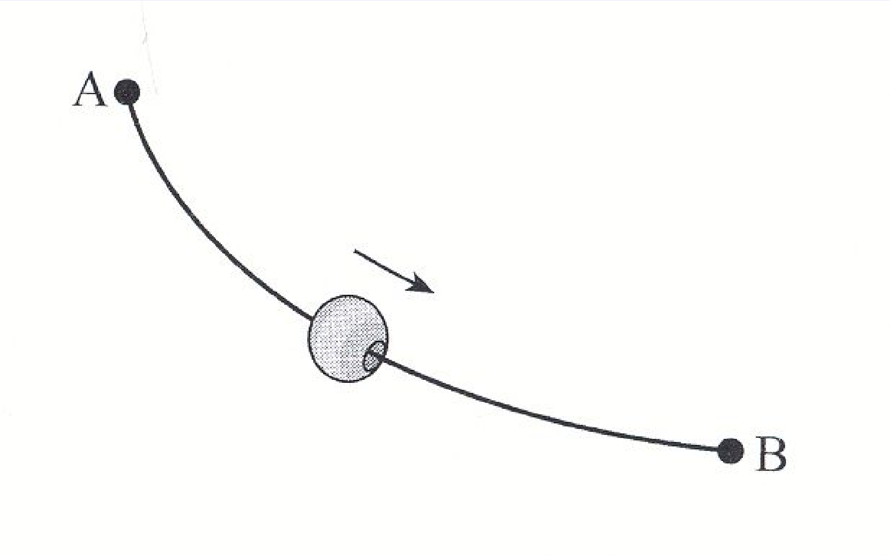
Johann Bernoulli (1696): Dva body A a B jsou spojeny drátkem po kterém klouže kulička.

Bernoulliova úloha

Johann Bernoulli (1696): Dva body A a B jsou spojeny drátkem po kterém klouže kulička.

OTÁZKA: Po jaké křivce sklouzne kulička z A do B *v nejkratším možném čase*?

Obrázek



Bernoulliova úloha - reakce kolegů

Bernoulliova úloha - reakce kolegů

Markýz de l'Hospital: To je nejkrásnější problém, jaký jsem kdy viděl a moc rád bych se do něj pustil, převeďte mi jej ale prosím do řeči čisté matematiky, fyzika mne totiž nesmírně otravuje.

Markýz de l'Hospital: To je nejkrásnější problém, jaký jsem kdy viděl a moc rád bych se do něj pustil, převeďte mi jej ale prosím do řeči čisté matematiky, fyzika mne totiž nesmírně otravuje.

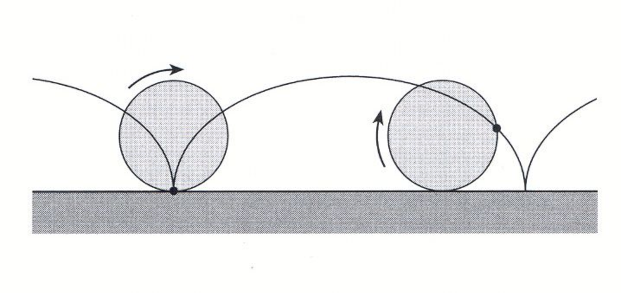
Isaac Newton: Nebudu pro blázny cizákům jakýmsi, kteří si mne pomocí matematiky dobírat chtějí!

Bernoulliova úloha - řešení

Bernoulliova úloha - řešení

Řešením Bernoulliovy úlohy je **cykloida**.

Řešením Bernoulliovy úlohy je **cykloida**.

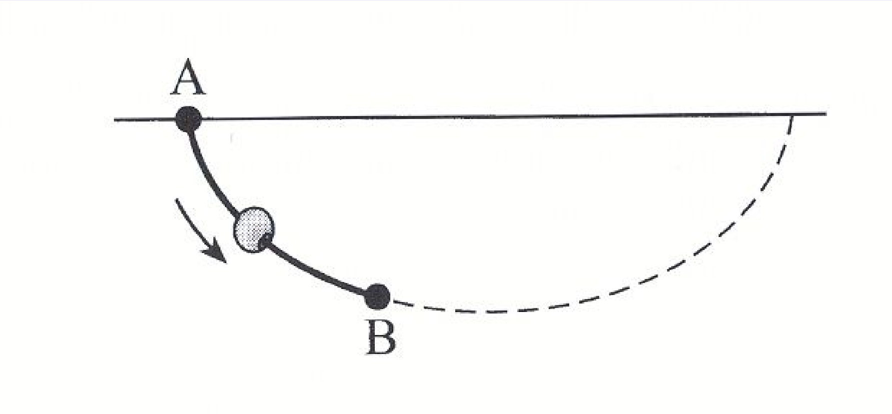


Bernoulliova úloha - rozuzlení

Bernoulliova úloha - rozuzlení

Takže řešení vypadá asi takhle:

Takže řešení vypadá asi takhle:

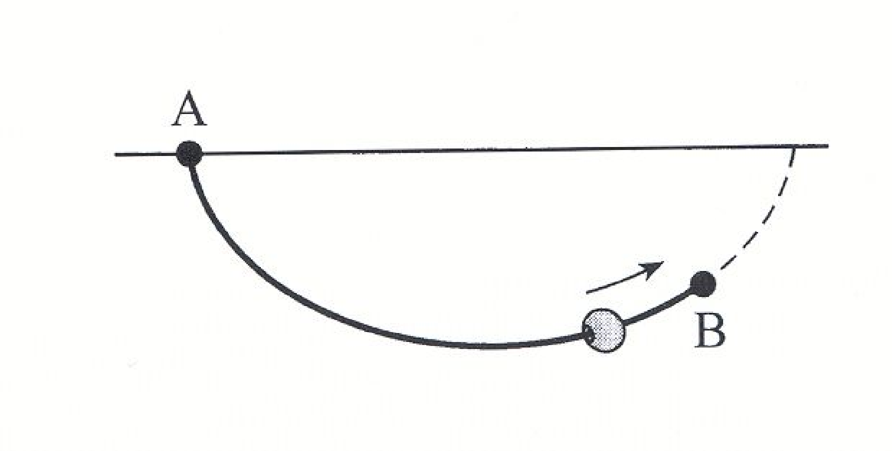


Bernoulliova úloha - rozuzlení

A to dokonce i tehdy, když chvilku vede **pod úrovní bodu** B (!!)

Bernoulliova úloha - rozuzlení

A to dokonce i tehdy, když chvilku vede **pod úrovní bodu** B (!!)



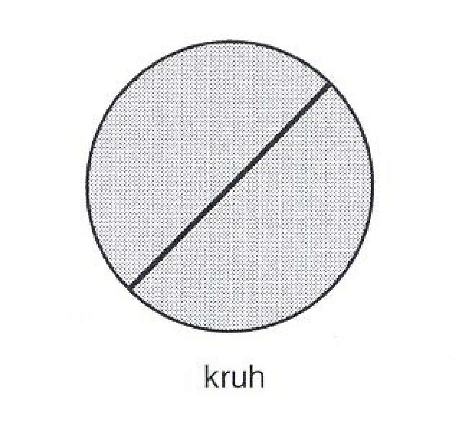
Kakeyův problém

Kakeyův problém

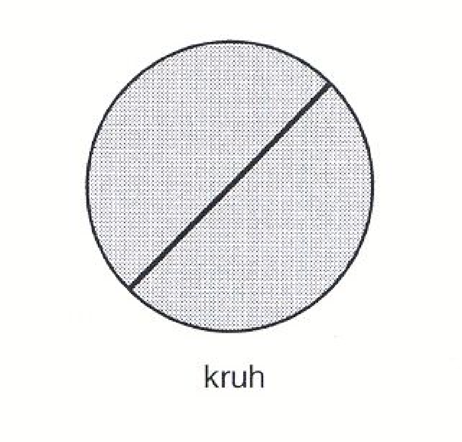
Určete nejmenší plochu potřebnou k otočení jehly délky 1 o 180 stupňů.

První nástřel řešení: kruh o poloměru $\frac{1}{2}$

První nástřel řešení: kruh o poloměru $\frac{1}{2}$



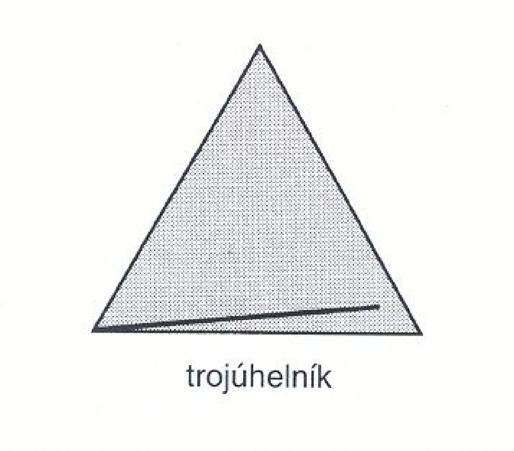
První nástřel řešení: kruh o poloměru $\frac{1}{2}$



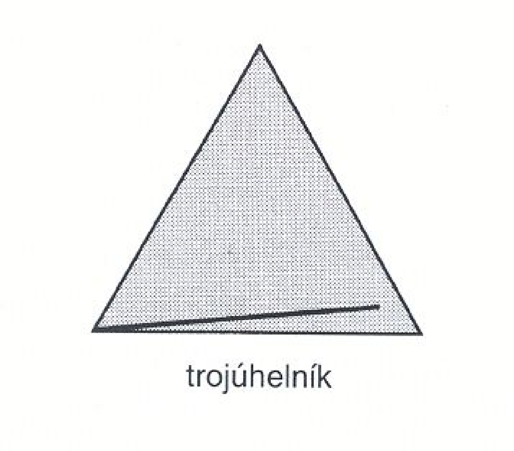
plocha: $\frac{\pi}{4} \approx$ **0.78**

Významný posun vpřed: rovnostranný trojúhelník

Významný posun vpřed: rovnostranný trojúhelník



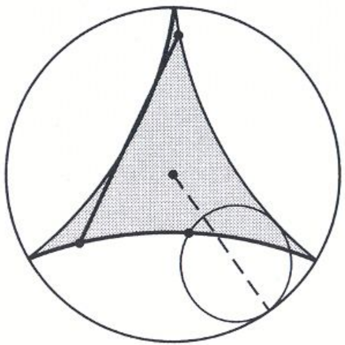
Významný posun vpřed: rovnostranný trojúhelník



plocha: $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{0.58}$

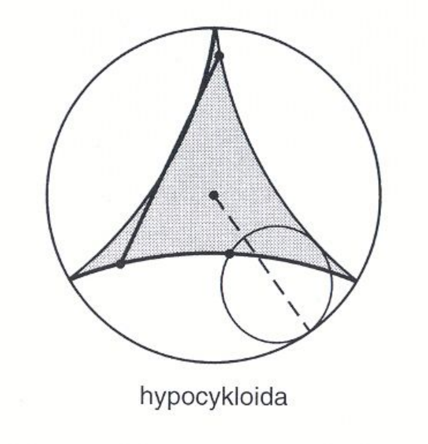
Plocha se zmenšuje

Plocha se zmenšuje



hypocykloida

Plocha se zmenšuje



Plocha: $\frac{\pi}{8} \approx$ **0.39**

Kakeyův problém – řešení

A.S. Besicovitch (1927):

A.S. Besicovitch (1927):

Kakeyův problém vůbec žádné řešení NEMÁ!

Kakeyův problém – řešení

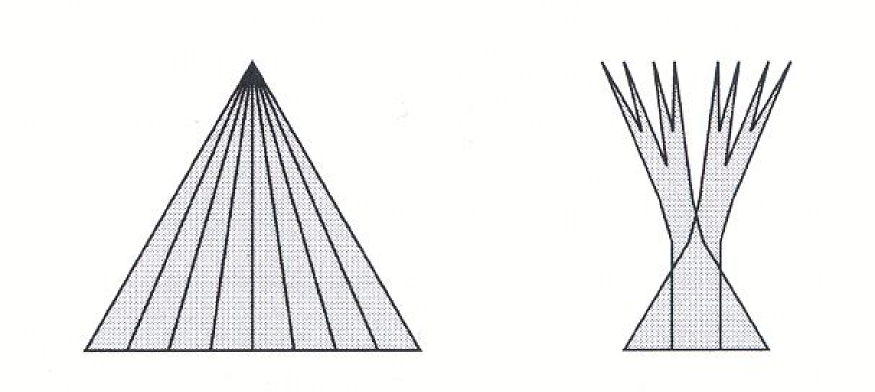
A.S. Besicovitch (1927):

Kakeyův problém vůbec žádné řešení NEMÁ!

Jehlu je možno otočit na ploše libovolně malého obsahu!

Řešení připomíná indiánské tee-pee

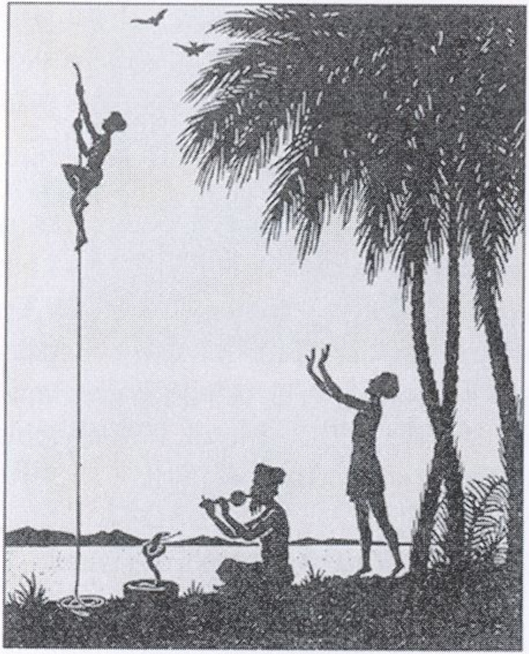
Řešení připomíná indiánské tee-pee

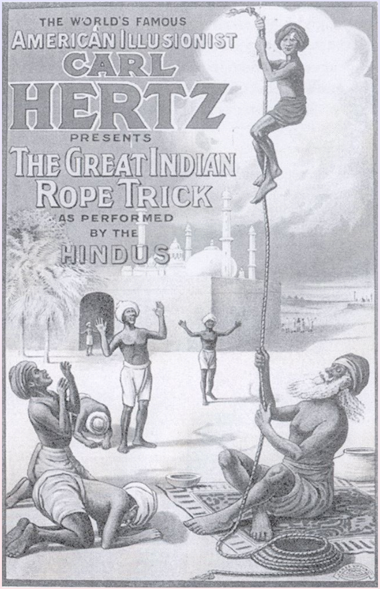


Věci k neuvěření

Věci k neuvěření

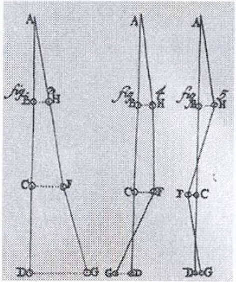
- Indický trik s lanem




THE WORLD'S FAMOUS
AMERICAN ILLUSIONIST
CARL
HERTZ
PRESENTS
THE GREAT INDIAN
ROPE TRICK
AS PERFORMED
BY THE
HINDUS

Teoretický podklad: sdružená kyvadla

Daniel Bernoulli (1738) publikoval převratnou práci o pohybu sdružených kyvadel



Teoretický pokus o stabilizaci obráceného kyvadla

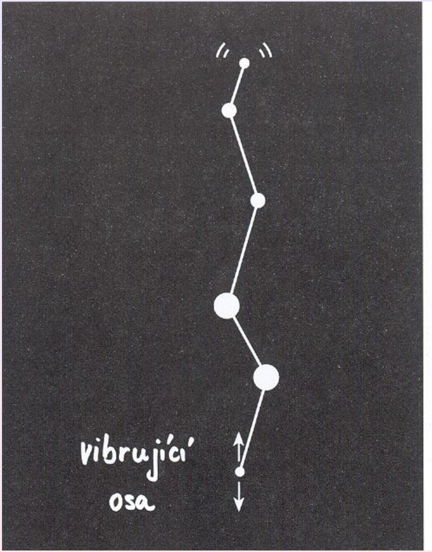
Teoretický pokus o stabilizaci obráceného kyvadla

David Acheson (1992) dokázal (pomocí diferenciálních rovnic), že systém **obrácených** kyvadel lze stabilizovat, jestliže rozvibrujeme osu nahoru a dolů (!)

Teoretický pokus o stabilizaci obráceného kyvadla

David Acheson (1992) dokázal (pomocí diferenciálních rovnic), že systém **obrácených** kyvadel lze stabilizovat, jestliže rozvibrujeme osu nahoru a dolů (!)

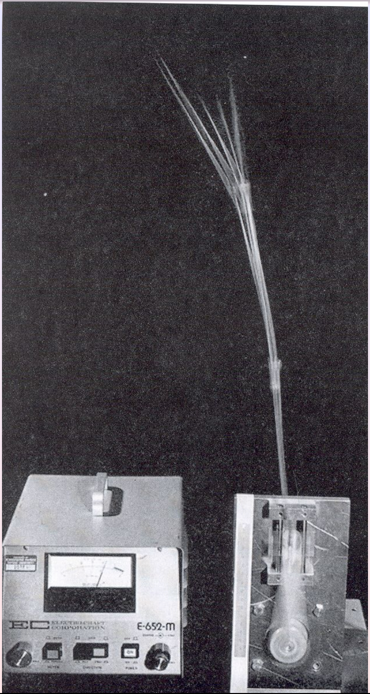
kyvadel může být libovolně mnoho a různých velikostí


vibrující
osa

Ověření teorie v praxi

Ověření teorie v praxi

David Acheson a Tom Mullin (1993) konstrukce zařízení a ověření teorie pokusem


E-652-m

Jak se (jako matfyzák) nejlépe zviditelnit?

Richard Nixon (1972):

Richard Nixon (1972):

“Rychlost růstu inflace se zpomaluje.”

Richard Nixon (1972):

“Rychlost růstu inflace se zpomaluje.”

Komentář z tisku:

Richard Nixon (1972):

"Rychlost růstu inflace se zpomaluje."

Komentář z tisku:

První doložený případ využití *třetí derivace* v politice.

Matematika v politice - pokračování

Ronald Reagan: změna adresy

Matematika v politice - pokračování

Ronald Reagan: změna adresy

ze St. Cloud Road 666

Matematika v politice - pokračování

Ronald Reagan: změna adresy

ze St. Cloud Road 666

na St. Cloud Road 668

Ronald Reagan: změna adresy

ze St. Cloud Road 666

na St. Cloud Road 668

(666 je ďáblovo číslo).

U nás je to lepší

VÝPOČET:

U nás je to lepší

VÝPOČET:

$$2014 - 1348 = 666.$$

U nás je to lepší

VÝPOČET:

$$2014 - 1348 = 666.$$

Rektor UK

VÝPOČET:

$$2014 - 1348 = 666.$$

Rektor UK nechal při oslavách 666. výročí založení UK zahrát

U nás je to lepší

VÝPOČET:

$$2014 - 1348 = 666.$$

Rektor UK nechal při oslavách 666. výročí založení UK zahrát

Number of the Beast

VÝPOČET:

$$2014 - 1348 = 666.$$

Rektor UK nechal při oslavách 666. výročí založení UK zahrát

Number of the Beast

od **Iron Maiden**.

Naší hlavní zbraní je *důkaz*.

Naší hlavní zbraní je *důkaz*.

Ukázka důkazu

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Ukázka důkazu

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

Důkaz.

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

Důkaz.

Předpokládejme pro spor, že tvrzení věty neplatí.

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

Důkaz.

Předpokládejme pro spor, že tvrzení věty neplatí.
Existují tedy přirozená čísla, která nejsou zajímavá.

Ukázka důkazu

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

Důkaz.

Předpokládejme pro spor, že tvrzení věty neplatí.
Existují tedy přirozená čísla, která nejsou zajímavá.
Pak existuje *nejmenší* nezajímavé přirozené číslo.

Ukázka důkazu

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

Důkaz.

Předpokládejme pro spor, že tvrzení věty neplatí.
Existují tedy přirozená čísla, která nejsou zajímavá.
Pak existuje *nejmenší* nezajímavé přirozené číslo.
To je nejmenší číslo s jistou netriviální vlastností.

Ukázka důkazu

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

Důkaz.

Předpokládejme pro spor, že tvrzení věty neplatí.
Existují tedy přirozená čísla, která nejsou zajímavá.
Pak existuje *nejmenší* nezajímavé přirozené číslo.
To je nejmenší číslo s jistou netriviální vlastností.
To jej činí zajímavým.

Ukázka důkazu

VĚTA (o zajímavosti čísel):

Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.

Důkaz.

Předpokládejme pro spor, že tvrzení věty neplatí.
Existují tedy přirozená čísla, která nejsou zajímavá.
Pak existuje *nejmenší* nezajímavé přirozené číslo.
To je nejmenší číslo s jistou netriviální vlastností.
To jej činí zajímavým.
Dostáváme spor.

Základním nástrojem matematické analýzy je *limitní přechod*.

Limita a umění

Limita a umění

Limita a umění

Circle Limit III (M.C. Escher, dřevořezba, 1959)

V matematické analýze studujeme například limity *posloupností*.

V matematické analýze studujeme například limity *posloupností*.

Posloupnostmi se zabývají i jinde, například u *psychologa*.

Zrádné posloupnosti

Zrádné posloupnosti

Příklad:

Příklad:

Na kolik oblastí rozdělí kruh **spojnice n bodů**.?

Obrázek

Obrázek

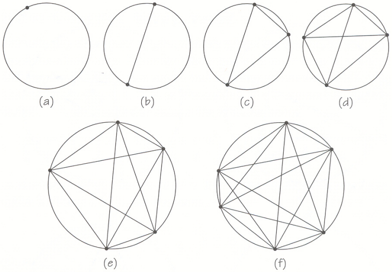
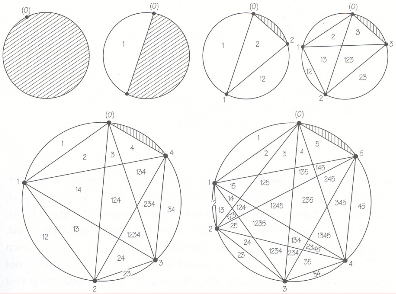


FIGURE 3.11 *A deceptive sequence.*



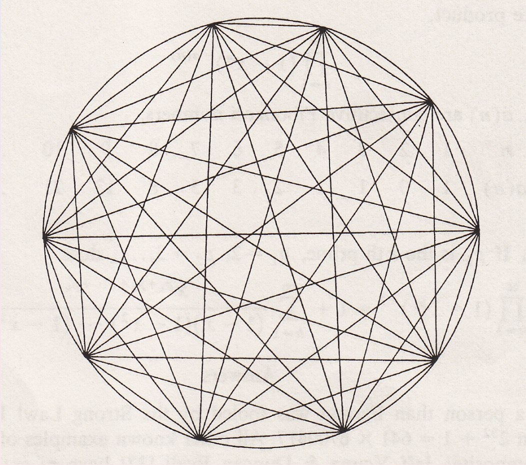
Prvních pár členů

Prvních pár členů

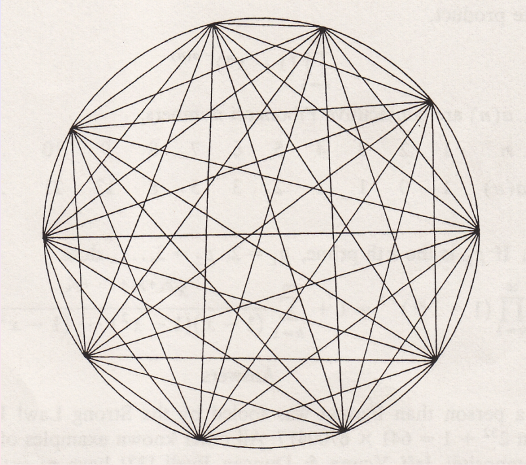
- Pro $n = 1$ dostaneme 1 oblast.
- Pro $n = 2$ dostaneme 2 oblasti.
- Pro $n = 3$ dostaneme 4 oblasti.
- Pro $n = 4$ dostaneme 8 oblastí.
- Pro $n = 5$ dostaneme 16 oblastí.

Nápověda pro fajnšmekry

Nápověda pro fajnšmekry



Nápověda pro fajnšmekry



Pro $n = 10$ dostaneme 256 oblastí.

Záludná otázka

Záludná otázka

Kolik oblastí dostaneme pro $n = 6$?

Záludná otázka

Kolik oblastí dostaneme pro $n = 6$?

Odpověď: **31**.

Je na to dokonce vzorec

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel,

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel, nýbrž

$$\frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right)$$

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel, nýbrž

$$\frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right)$$

nebo též

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}.$$

A jak to bylo s tou nápovědou?

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

Je třeba si neplést

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,$$
$$\mathbf{256},\ 386,\ 562,\ 794,\ 1093,\ \ldots$$

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

Je třeba si neplést

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,\ \mathbf{256},\ 386,\ 562,\ 794,\ 1093,\ \ldots$$

a

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \mathbf{256},\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ \ldots$$

Psychologova posloupnost

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Odpověď: $a_6 = 2018$.

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Odpověď: $a_6 = 2018$.

Vzorec:

$$a_n = n + 2012 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!}.$$

Jak páchat škody pomocí matematiky?

Kolik je π?

Jak chytat podvodníky pomocí limit?

Umíte správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

Umíte správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty

Umíte správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty
- plocha jednotlivých ostrůvků v rozsáhlém souostroví

Umíte správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty
- plocha jednotlivých ostrůvků v rozsáhlém souostroví
- ceny zboží v supermarketu

Umíte správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty
- plocha jednotlivých ostrůvků v rozsáhlém souostroví
- ceny zboží v supermarketu

Je zřejmé, že **odpověď je $\frac{1}{9}$**?

Benfordův zákon

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

Benfordův zákon

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

Pravděpodobnost, že určité číslo bude začínat číslicí n, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *je dána vzorcem*

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

Pravděpodobnost, že určité číslo bude začínat číslicí n, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *je dána vzorcem*

$$log(n+1) - \log n.$$

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

Pravděpodobnost, že určité číslo bude začínat číslicí n, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *je dána vzorcem*

$$log(n+1) - \log n.$$

Tedy například:

$$\begin{aligned} &\text{pravděpodobnost, že číslo začne } \textit{jedničkou} && = 30,1\% \\ &\text{pravděpodobnost, že číslo začne } \textit{dvojkou} && = 17,6\% \\ &\text{pravděpodobnost, že číslo začne } \textit{trojkou} && = 12,5\% \\ &\text{pravděpodobnost, že číslo začne } \textit{devítkou} && = 4,6\% \end{aligned}$$

Benfordův zákon - ilustrace

Benfordův zákon - ilustrace

Příklad (demonstrační): Představme si, že vybíráme ze souboru dat

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.$$

Benfordův zákon - ilustrace

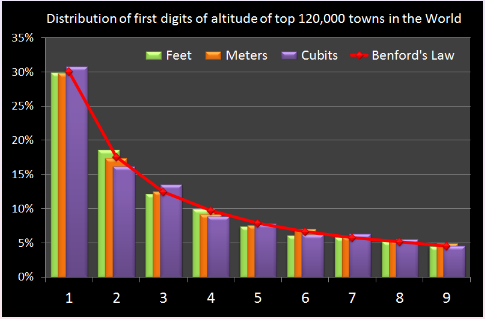
Příklad (demonstrační): Představme si, že vybíráme ze souboru dat

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.$$

Vidíme, že jedničky vskutku převládají.

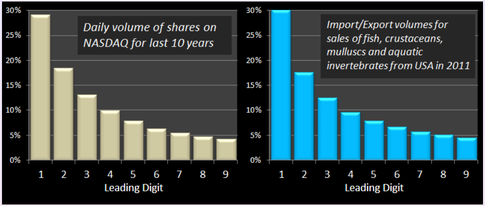
Bendford v praxi

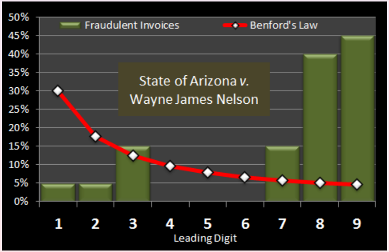
Bendford v praxi



Bendford v praxi

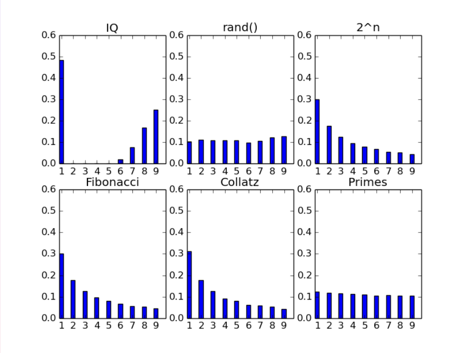
Bendford v praxi





A když rozdělení není náhodné . . .

A když rozdělení není náhodné . . .



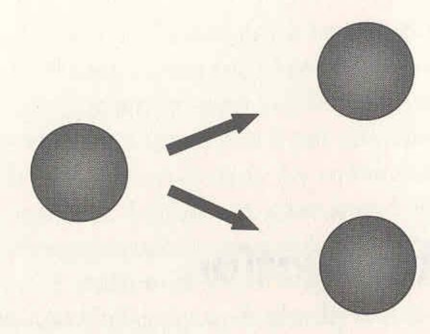
Jak matematikou pohněvat veřejnost?

Banachova–Tarského věta:

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení pěti podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.

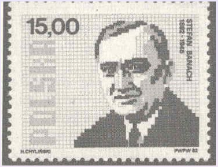
Banachova–Tarského věta:

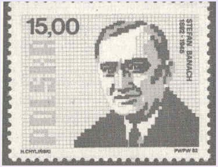
Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení pěti podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.



Publikace věty: 1924

Publikace věty: 1924





Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.

Par

St. Banach (Lwów) et A. Tarski (Varsovie).

Nous étudions dans cette Note les notions de *l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie*, resp. *dénombrable*. Deux ensembles de points situés dans un espace métrique sont dits équivalents par décomposition finie (ou dénombrable), lorsqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal (ou une infinité dénombrable) de parties disjointes respectivement congruentes.

Les principaux résultats contenus dans le présent article sont les suivants:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 3$ dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.

Un théorème analogue subsiste pour les ensembles situés sur la surface d'une sphère; mais le théorème correspondant concernant l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions est faux.

D'autre part:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 1$ dimensions deux ensembles arbitraires (bornés ou non), contenant des points intérieures, sont équivalents par décomposition dénombrable.

Ohlasy

Ohlasy

Následovala vlna kontroverze mezi matematiky.

Ohlasy

Následovala vlna kontroverze mezi matematiky.

Studenti se chodili ptát: *opravdu matematici umějí zdvojnásobovat objem?*

Následovala vlna kontroverze mezi matematiky.

Studenti se chodili ptát: *opravdu matematici umějí zdvojnásobovat objem?*

V Illinoisu počestný občan požadoval zákon, který by výuku takových nesmyslů zakazoval.

Banachova–Tarského věta - praktičtější formulace

Banachova–Tarského věta - praktičtější formulace

Libovolnou bankovku, například 100 Euro je možné rozstříhat na konečně mnoho kousků, z nichž potom lze sestavit bankovku jinou, například 500 Euro.

Banachova–Tarského věta - praktičtější formulace

Libovolnou bankovku, například 100 Euro je možné rozstříhat na konečně mnoho kousků, z nichž potom lze sestavit bankovku jinou, například 500 Euro.

K tomu stačí vlastnit velice speciální nůžky.

Banachova–Tarského věta - praktičtější formulace

Libovolnou bankovku, například 100 Euro je možné rozstříhat na konečně mnoho kousků, z nichž potom lze sestavit bankovku jinou, například 500 Euro.

K tomu stačí vlastnit velice speciální nůžky.

Tyto dovednosti vyučujeme na matfyzu v teorii míry.

Libovolnou bankovku, například 500 Euro je možné rozstříhat na konečně mnoho kousků, z nichž potom lze sestavit bankovku jinou, například 100 Euro.

Kdo za to může?

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

jejich **teorie míry**,

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

jejich **teorie míry**,

práce s nekonečnem,

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

jejich **teorie míry**,

práce s nekonečnem,

existence **neměřitelných množin**,

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

jejich **teorie míry**,

práce s nekonečnem,

existence **neměřitelných množin**,

a hlavně **axiom výběru**

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout bez výhrad a bez další interpretace.*

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout bez výhrad a bez další interpretace.*

Pak zase ale musíme začít *zdvojovat hmotu*.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální!

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální!

Celé je to možné jedině díky tomu, že pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální!

Celé je to možné jedině díky tomu, že pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Zdvojovat hmotu tedy asi nebudeme.

Jak se vyhnout paradoxu?

Richardův paradox

Richardův paradox

V roce 1905 objevil **Jules Richard** zajímavý paradox.

Richardův paradox

V roce 1905 objevil **Jules Richard** zajímavý paradox.

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**,

Richardův paradox

V roce 1905 objevil **Jules Richard** zajímavý paradox.

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Richardův paradox

V roce 1905 objevil **Jules Richard** zajímavý paradox.

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *rok nástupu* ***Ferdinanda I. Habsburského*** *na český trůn* definuje číslo

Richardův paradox

V roce 1905 objevil **Jules Richard** zajímavý paradox.

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *rok nástupu **Ferdinanda I. Habsburského** na český trůn* definuje číslo **1526**.

Richardův paradox

V roce 1905 objevil **Jules Richard** zajímavý paradox.

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *rok nástupu* ***Ferdinanda I. Habsburského*** *na český trůn* definuje číslo **1526**.

Naopak, výraz *historický význam Habsburků na českém trůně*

Richardův paradox

V roce 1905 objevil **Jules Richard** zajímavý paradox.

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *rok nástupu **Ferdinanda I. Habsburského** na český trůn* definuje číslo **1526**.

Naopak, výraz *historický význam Habsburků na českém trůně* žádné číslo nedefinuje.

Richardův paradox - pokračování

Richardův paradox - pokračování

OTÁZKA:

OTÁZKA: Které číslo definuje následující slovní spojení?

Richardův paradox - pokračování

OTÁZKA: Které číslo definuje následující slovní spojení?

"Nejmenší číslo, které není možné žádným způsobem definovat pomocí českého slovního útvaru obsahujícího počet slov ostře menší než dvacet."

Richardův paradox - pokračování

OTÁZKA: Které číslo definuje následující slovní spojení?

“Nejmenší číslo, které není možné žádným způsobem definovat pomocí českého slovního útvaru obsahujícího počet slov ostře menší než dvacet.”

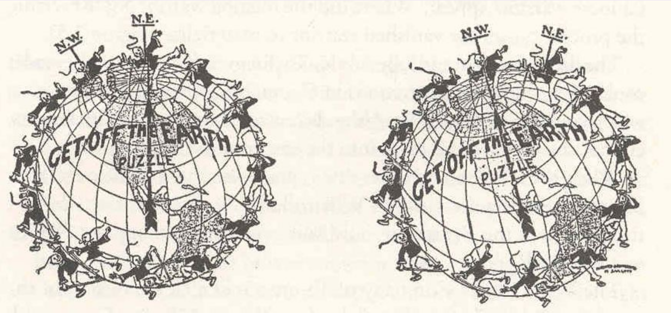
Ať je toto číslo jakékoli, právě jsme jej definovali pomocí českého slovního útvaru o pouhých devatenácti slovech.

Švindly

Švindly

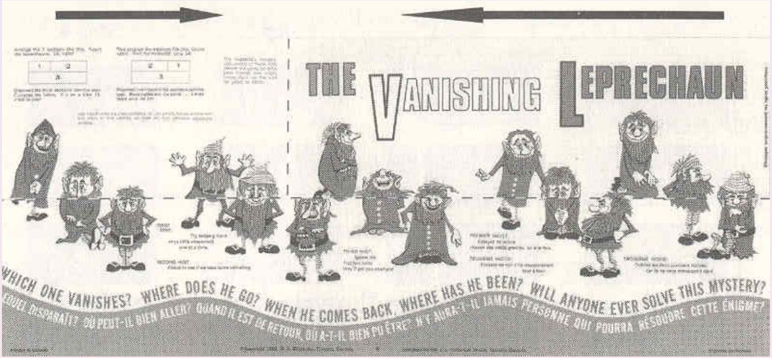
Sam Loyd.

Sam Loyd.

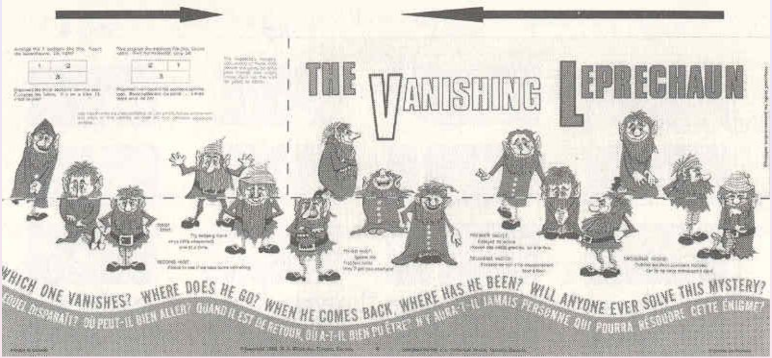


Zmizelý pidižvík

Zmizelý pidižvík



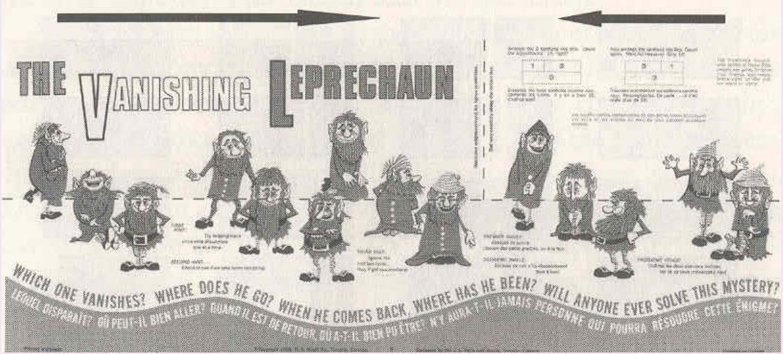
Zmizelý pidižvík



Máme patnáct pidižvíků.

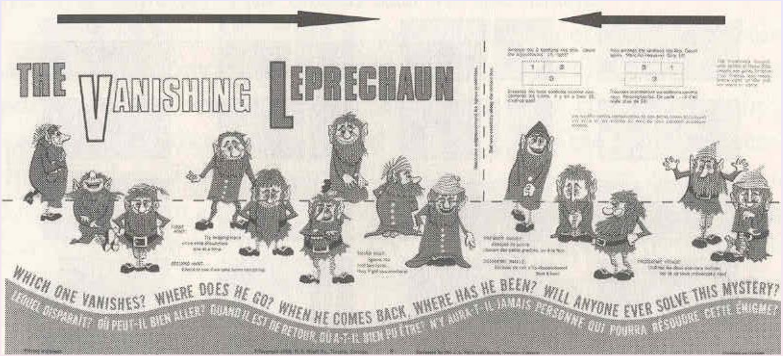
Zmizelý pidižvík

Zmizelý pidižvík



Po záměně horních dílů jich je jen 14.

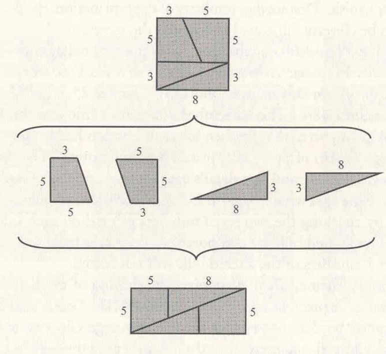
Zmizelý pidižvík



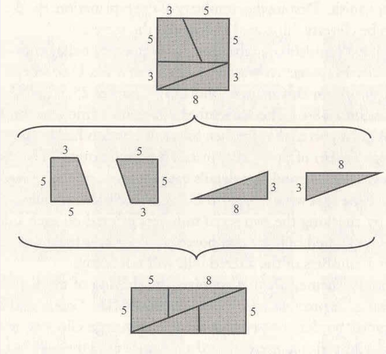
Po záměně horních dílů jich je jen 14.

Kam zmizel patnáctý pidižvík?

Fígl se čtvercem

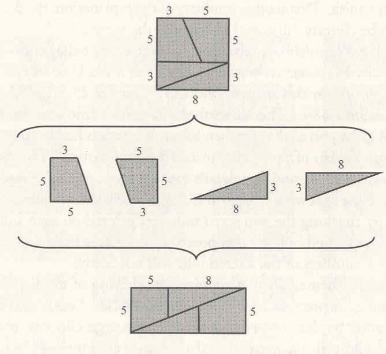


Fígl se čtvercem

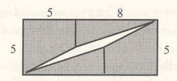


a jeho vysvětlení:

Fígl se čtvercem



a jeho vysvětlení:



Paradoxy pravdivé

Braessův paradox (každý si může ověřit)

Braessův paradox (každý si může ověřit)

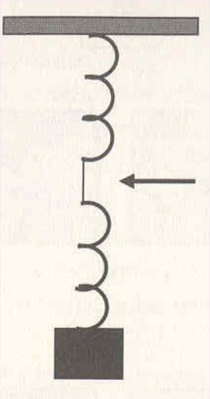
Zavěsíme závaží na pružinu přerušenou strunou, obě části pružiny přichytíme dvěma dalšími strunami a původní strunu přestřihneme.

Braessův paradox (každý si může ověřit)

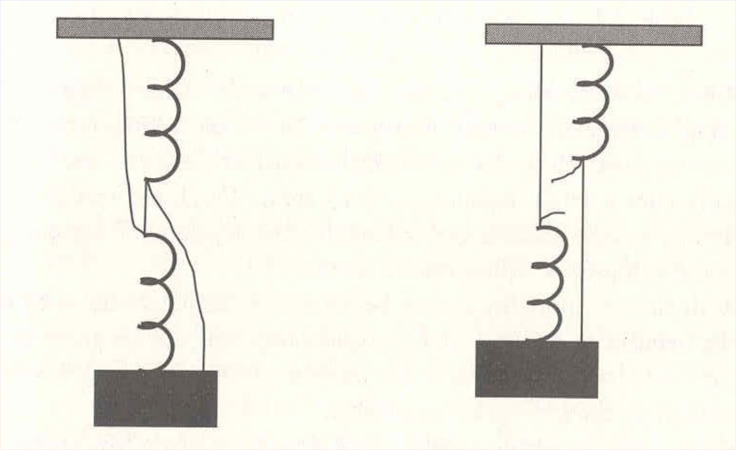
Zavěsíme závaží na pružinu přerušenou strunou, obě části pružiny přichytíme dvěma dalšími strunami a původní strunu přestřihneme.

Je zřejmé, že závaží klesne?

Klesne závaží?

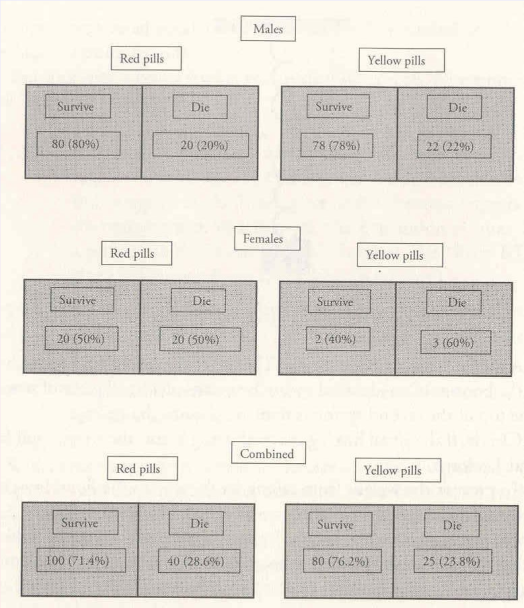


Opak je pravdou!



Simpsonův paradox

Posuzujeme efektivnost dvou druhů léku proti zákeřné chorobě. Máme k dispozici data aplikace léků na 245 pacientů, z toho 200 mužů a 45 žen.


Males
Red pills
Survive
80 (80%)
Die
20 (20%)
Yellow pills
Survive
78 (78%)
Die
22 (22%)
Females
Red pills
Survive
20 (50%)
Die
20 (50%)
Yellow pills
Survive
2 (40%)
Die
3 (60%)
Combined
Red pills
Survive
100 (71.4%)
Die
40 (28.6%)
Yellow pills
Survive
80 (76.2%)
Die
25 (23.8%)

Položte si dvě otázky:

Položte si dvě otázky:

1) *jsem-li pacient, kterému léku dám přednost?*

Simpsonův paradox

Položte si dvě otázky:

1) *jsem-li pacient, kterému léku dám přednost?*

2) *jsem-li lékař, jaký lék nabídnu pacientovi, jestliže nevím, zda je to muž nebo žena?*

Jak poznat kolegu matfyzáka v davu?

Jak rozpoznat matfyzáka dotazem

Jak rozpoznat matfyzáka dotazem

Otázka: Jaký je podle Vás *nejblbější* název filmu na světě?

Otázka: Jaký je podle Vás *nejblbější* název filmu na světě?

Správná odpověď:

Jak rozpoznat matfyzáka dotazem

Otázka: Jaký je podle Vás *nejblbější* název filmu na světě?

Správná odpověď: *Nekonečný příběh II*.

Používáme *aritmetiku*.

Ukázka využití aritmetiky v praxi

Z historie (zastrašování neposlušného generála):

Z historie (zastrašování neposlušného generála):

Vy nejste jen záporná veličina, vy jste záporná veličina na druhou!

(Josef Vissarionovič Džugašvili, zvaný též Stalin, čelní představitel SSSR, 1878–1953)

Pracujeme s *kvantifikátory*.

Ukázka využití kvantifikátoru v praxi

Z textu k písni Akordy, oceněné Portou 1982:

Ukázka využití kvantifikátoru v praxi

Z textu k písni Akordy, oceněné Portou 1982:

> *Vyždímejte kapesníky a nebuďte smutní,*
> *každá holka pro někoho má sluch absolutní!*

(Karel Plíhal, *1958)

Přátelíme se s *fysiky*.

Ten okamžik trval snad celý světelný rok . . .

Lenka Filipová (*1954)

Ten okamžik trval snad celý světelný rok . . .

Lenka Filipová (*1954)

PRO SROVNÁNÍ:

Fysikální praktikum v písňové tvorbě

Ten okamžik trval snad celý světelný rok . . .

Lenka Filipová (*1954)

PRO SROVNÁNÍ:

Dnes ráno jsem uběhl patnáct kilogramů.

(Luboš Pick, *1961)

Tak, a teď **vážně**.

Mnohé z toho, co budeme studovat v matematické analýze, je důsledkem **pařížské krize** z roku 1807.

Pařížská krize v matematice

Krize udeřila *21. prosince 1807.*

Krize udeřila *21. prosince 1807.*

Krize udeřila *21. prosince 1807.*

Do Francouzského Institutu přinesl 39-letý *Joseph Fourier* (1768-1830) svou práci *Teorie vedení tepla v pevných tělesech*.

Vedení tepla

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na konstantní teplotě 0°,

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na konstantní teplotě 0°,
- teplo je dodáváno na jedné z krátkých stran,

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na konstantní teplotě 0°,
- teplo je dodáváno na jedné z krátkých stran,
- druhá strana je daleko (v nekonečnu).

Fourierův tenký pásek

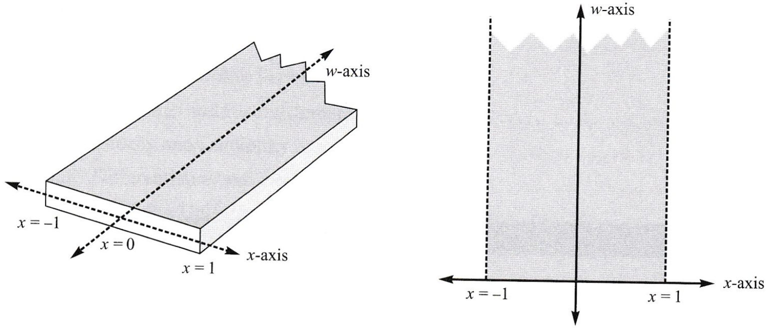


FIGURE 1.1. Two views of Fourier's thin plate.

Matematický popis

Matematický popis

$z(x, y)$ ...teplota v bodě $[x, y]$

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota v bodě $[x, y]$ (funkce dvou proměnných),

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota v bodě $[x, y]$ (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

Matematický popis

$z(x,y)$ ... teplota v bodě $[x,y]$ (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1,y) = z(1,y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x,0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

Matematický popis

$z(x,y)$ ... teplota v bodě $[x,y]$ (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1,y) = z(1,y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x,0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

Fourier se omezil na případ, kdy $f(x) = f(-x)$ (f je sudá funkce).

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota v bodě $[x, y]$ (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x, 0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

Fourier se omezil na případ, kdy $f(x) = f(-x)$ (f je sudá funkce).

První a nejdůležitější případ: $z(x, 0) = f(x) = 1$.

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota v bodě $[x, y]$ (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x, 0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

Fourier se omezil na případ, kdy $f(x) = f(-x)$ (f je sudá funkce).

První a nejdůležitější případ: $z(x, 0) = f(x) = 1$.

Úkol: nalézt stabilní řešení splňující uvedené podmínky.

První potíž: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod nespojitosti)?

První potíž: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod nespojitosti)?

Fourier nicméně našel řešení.

První potíž: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod nespojitosti)?

Fourier nicméně našel řešení.

Studoval funkce, které klesnou k nule na okolí bodu $[0, 1]$.

Fourierovo tvrzení

Tvrzení:

Fourierovo tvrzení

Tvrzení: Jestliže je možné funkci f vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = a_1 \cos(\frac{\pi x}{2}) + a_2 \cos(\frac{3\pi x}{2}) + \cdots + a_n \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2}),$$

Tvrzení: Jestliže je možné funkci f vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = a_1 \cos(\frac{\pi x}{2}) + a_2 \cos(\frac{3\pi x}{2}) + \cdots + a_n \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2}),$$

pak se bude teplota řídit vzorcem

$$z(x,w) = a_1 e^{-\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2}) + \cdots + a_n e^{-(2n-1)\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2}).$$

Fourierovo tvrzení

Tvrzení: Jestliže je možné funkci f vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = a_1 \cos(\frac{\pi x}{2}) + a_2 \cos(\frac{3\pi x}{2}) + \cdots + a_n \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2}),$$

pak se bude teplota řídit vzorcem

$$z(x,w) = a_1 e^{-\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2}) + \cdots + a_n e^{-(2n-1)\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2}).$$

(exponenciála, kosinus, řada funkcí, číslo π)

Šíření tepla v pásku

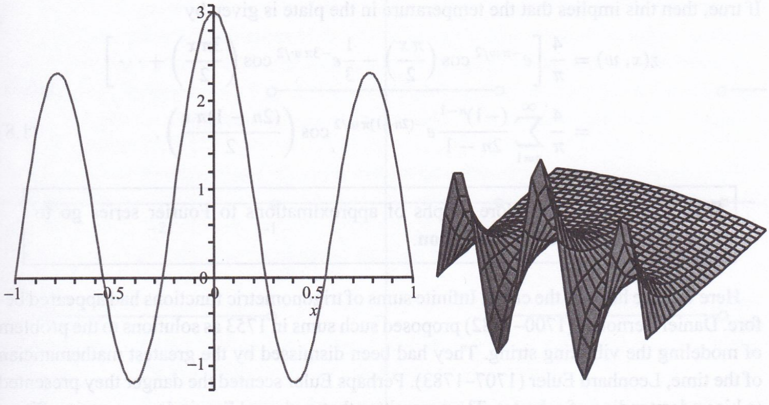


FIGURE 1.2. The functions $f(x)$ and $z(x, w)$.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru. To vylučuje $f = 1$.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru. To vylučuje $f = 1$. To se Fourierovi nelíbilo, protože v praxi to jde.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru. To vylučuje $f = 1$. To se Fourierovi nelíbilo, protože v praxi to jde.

Fourier překonal i tuto potíž.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru. To vylučuje $f = 1$. To se Fourierovi nelíbilo, protože v praxi to jde.

Fourier překonal i tuto potíž. Všiml si, že zvyšujeme-li n, dostaneme funkce, které se stále více blíží k $f = 1$.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru. To vylučuje $f = 1$. To se Fourierovi nelíbilo, protože v praxi to jde.

Fourier překonal i tuto potíž. Všiml si, že zvyšujeme-li n, dostaneme funkce, které se stále více blíží k $f = 1$.

Revoluční myšlenka:

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru. To vylučuje $f = 1$. To se Fourierovi nelíbilo, protože v praxi to jde.

Fourier překonal i tuto potíž. Všiml si, že zvyšujeme-li n, dostaneme funkce, které se stále více blíží k $f = 1$.

Revoluční myšlenka: co kdybychom jich vzali nekonečně mnoho?

Fourierův rozklad jedničky do nekonečné řady

Fourierův rozklad jedničky do nekonečné řady

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Fourierův rozklad jedničky do nekonečné řady

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Je-li toto pravda, potom

$$
\begin{aligned}
z(x,w) &= \frac{4}{\pi}\left[e^{-\pi w/2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}e^{-3\pi w/2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \dots\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-(2n-1)\pi w/2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Fourierův rozklad jedničky do nekonečné řady

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Je-li toto pravda, potom

$$z(x,w) = \frac{4}{\pi}\left[e^{-\pi w/2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}e^{-3\pi w/2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-(2n-1)\pi w/2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

(nekonečná řada funkcí)

A právě v tomto tvrzení se nacházela podstata krize.

A právě v tomto tvrzení se nacházela podstata krize.

Nekonečné řady funkcí byly známy (Taylorovy řady), ale výhradně polynomů.

A právě v tomto tvrzení se nacházela podstata krize.

Nekonečné řady funkcí byly známy (Taylorovy řady), ale výhradně polynomů.

Nekonečné trigonometrické řady prosazoval v 18. století Daniel Bernoulli k popisu vibrující struny, ale umlčel jej Leonhard Euler.

A právě v tomto tvrzení se nacházela podstata krize.

Nekonečné řady funkcí byly známy (Taylorovy řady), ale výhradně polynomů.

Nekonečné trigonometrické řady prosazoval v 18. století Daniel Bernoulli k popisu vibrující struny, ale umlčel jej Leonhard Euler.

Zásadní rozdíl mezi Bernoullim a Fourierem: Fourier se opíral o empirická měření.

Fourierova komise

Fourierova komise

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

Fourierova komise

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)

Fourierova komise

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)

Fourierova komise

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)

Fourierova komise

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)
- Gaspard Monge (61)

Fourierova komise

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)
- Gaspard Monge (61)
- Siméon Denis Poisson (26)

Fourierova komise

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)
- Gaspard Monge (61)
- Siméon Denis Poisson (26)

Závěr: Fourierova práce nepřináší nic zajímavého ani nového, zamítá se.

Posudek komise sepsal Poisson na jaře 1808.

Posudek komise sepsal Poisson na jaře 1808.

Lagrange později zveřejnil řadu konkrétních námitek.

Posudek komise sepsal Poisson na jaře 1808.

Lagrange později zveřejnil řadu konkrétních námitek.

Lagrange: Nebude to konvergovat!

Posudek komise sepsal Poisson na jaře 1808.

Lagrange později zveřejnil řadu konkrétních námitek.

Lagrange: Nebude to konvergovat!

Fourier: Bude to konvergovat!

Posudek komise sepsal Poisson na jaře 1808.

Lagrange později zveřejnil řadu konkrétních námitek.

Lagrange: Nebude to konvergovat!

Fourier: Bude to konvergovat!

Lagrange: A kam? A jak? proč?

Fourierova drzá funkce

Fourierova drzá funkce

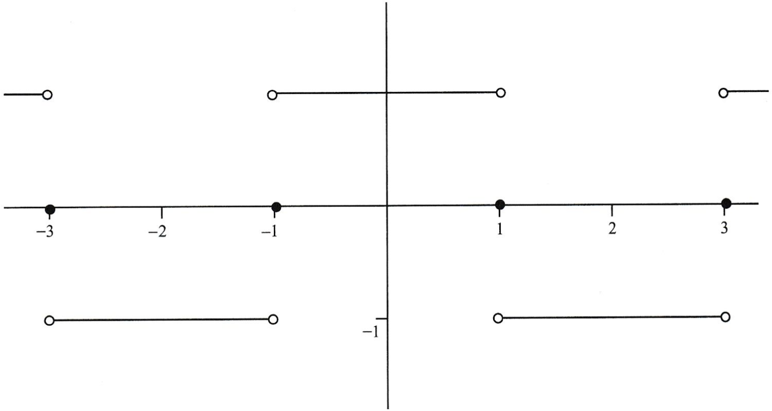


FIGURE 1.3. $f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right].$

Další vývoj

Další vývoj

Fourierova práce skutečně obsahovala jisté nedostatky, ovšem mnohem jemnější, než by se zdálo z Lagrangeových námitek.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.
- *1820* Poisson zveřejnil první pokus o vysvětlení konvergence Fourierových řad, bohužel s chybou.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.
- *1820* Poisson zveřejnil první pokus o vysvětlení konvergence Fourierových řad, bohužel s chybou.
- *1826* Augustin-Louis Cauchy publikoval další chybné řešení s nesprávnou interpretací stejnoměrné konvergence.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.
- *1820* Poisson zveřejnil první pokus o vysvětlení konvergence Fourierových řad, bohužel s chybou.
- *1826* Augustin-Louis Cauchy publikoval další chybné řešení s nesprávnou interpretací stejnoměrné konvergence.
- *1826* V Paříži se sešli Niels Henrik Abel a Gustav Lejeune Dirichlet, aby zhodnotili Cauchyovy výsledky.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.
- *1820* Poisson zveřejnil první pokus o vysvětlení konvergence Fourierových řad, bohužel s chybou.
- *1826* Augustin-Louis Cauchy publikoval další chybné řešení s nesprávnou interpretací stejnoměrné konvergence.
- *1826* V Paříži se sešli Niels Henrik Abel a Gustav Lejeune Dirichlet, aby zhodnotili Cauchyovy výsledky.
- *1829* Gustav Lejeune Dirichlet publikoval první korektní důkaz konvergence Fourierových řad (pocta učiteli).

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.
- *1820* Poisson zveřejnil první pokus o vysvětlení konvergence Fourierových řad, bohužel s chybou.
- *1826* Augustin-Louis Cauchy publikoval další chybné řešení s nesprávnou interpretací stejnoměrné konvergence.
- *1826* V Paříži se sešli Niels Henrik Abel a Gustav Lejeune Dirichlet, aby zhodnotili Cauchyovy výsledky.
- *1829* Gustav Lejeune Dirichlet publikoval první korektní důkaz konvergence Fourierových řad (pocta učiteli).
- *1830* Fourier zemřel.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.
- *1820* Poisson zveřejnil první pokus o vysvětlení konvergence Fourierových řad, bohužel s chybou.
- *1826* Augustin-Louis Cauchy publikoval další chybné řešení s nesprávnou interpretací stejnoměrné konvergence.
- *1826* V Paříži se sešli Niels Henrik Abel a Gustav Lejeune Dirichlet, aby zhodnotili Cauchyovy výsledky.
- *1829* Gustav Lejeune Dirichlet publikoval první korektní důkaz konvergence Fourierových řad (pocta učiteli).
- *1830* Fourier zemřel.
- *1867* Richard Dedekind publikoval zápisky Bernharda Riemanna o nekonečných řadách.

- *1811* Institute de France vypsal soutěž o nejlepší vysvětlení difúze tepla. Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovi.
- *1813* Lagrange zemřel.
- *1820* Poisson zveřejnil první pokus o vysvětlení konvergence Fourierových řad, bohužel s chybou.
- *1826* Augustin-Louis Cauchy publikoval další chybné řešení s nesprávnou interpretací stejnoměrné konvergence.
- *1826* V Paříži se sešli Niels Henrik Abel a Gustav Lejeune Dirichlet, aby zhodnotili Cauchyovy výsledky.
- *1829* Gustav Lejeune Dirichlet publikoval první korektní důkaz konvergence Fourierových řad (pocta učiteli).
- *1830* Fourier zemřel.
- *1867* Richard Dedekind publikoval zápisky Bernharda Riemanna o nekonečných řadách.
- *1872* Richard Dedekind, Karl Weierstrass a Eduard Heine publikovali tři různé definice reálných čísel.

- *2018-2020* A vy se to budete muset teď všechno naučit!

- *2018-2020* A vy se to budete muset teď všechno naučit!

Závěrečná poznámka: nic z tohoto promítání nemusíte umět.

The last slide

The last slide