Cvičení z NSTP129

Limitní věty

1. 12. 2011

---

1. Jaká je pravděpodobnost, že při 10 000 hodech symetrickou mincí padne rub více než 4900 krát?
2. Na server má přístup 100 uživatelů. Z dřívějších zkušeností víme, že uživatel má na serveru průměrně 120MB dat, směrodatná odchylka množství dat je 40 MB. Jak velký diskový prostor potřebujeme, aby s pravděpodobností 99% nedošlo k jeho zaplnění?
3. Nechť ν_n značí relativní četnost líců v n hodech mincí (mince je symetrická a hody provádíme nezávisle). Zjistěte, kolik musíme provést hodů, aby pravděpodobnost jevu $\big[|\nu_n - 1/2| \leq 0.05\big]$ byla alespoň 0.95? Řešte
   (a) pomocí Čebyševovy nerovnosti,
   (b) pomocí CLV.
4. Pojišťovna má pojištěno 1 000 osob stejného věku. Pravděpodobnost úmrtí v daném roce je u každého pojištěného 0,01. Pojištěnci platí roční pojistné 1 200 Kč a v případě úmrtí je oprávněné osobě vyplaceno 80 000 Kč.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že pojišťovna utrpí v daném roce ztrátu?
   (b) Jaký je v daném roce očekávaný zisk (resp. ztráta) pojišťovny?
5. Pořádáte narozeninovou oslavu pro 100 hostů a zajímá Vás, kolik máte objednat chlebíčků. Ze zkušenosti víte, že počet chlebíčků, který sní náhodný host, se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 3. Kolik přibližně musíte objednat chlebíčků, chcete-li mít jistotu, že s pravděpodobností 0.95 nebude žádný host hladovět?
6. Stroj generuje náhodné číslice 0-9, každé číslo se stejnou pravděpodobností.
   (a) Kolik nejméně číslic musíme vygenerovat, abychom s pravděpodobností 0.975 dostali alespoň jedno sudé číslo? (Spočítejte přesně.)
   (b) Kolik nejméně číslic musíme vygenerovat, abychom s pravděpodobností 0.975 dostali alespoň 20 sudých. (Použijte aproximaci pomocí CLV.)
7. Nechť má veličina X hustotu $f(x) = \dfrac{x^m}{m!}\, e^{-x}\mathrm{I}[x \geq 0]$, kde $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Spočítejte $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{Var}\,X$.
   (b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti ukažte, že platí
$$\mathrm{P}\Big(0 < X < 2(m+1)\Big) > \frac{m}{m+1}.$$
8. Hodíme stokrát šestistěnnou hrací kostkou.
   (a) Určete přibližnou hodnotu pravděpodobnosti, že výsledný součet leží v rozmezí od 320 do 380 (včetně).
   (b) Jaké výsledky dává pro situaci z (a) Čebyševova nerovnost?

Opakování z přednášky

Centrální limitní věta (CLV) pro posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin: Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s $0 < \mathsf{Var}\, X_1 < \infty$. Pak

$$\mathsf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n\,\mathsf{Var}\,X_1}} \leq x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

neboli ekvivalentně

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n - \mathsf{E}X_1}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X_1}} \leq x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde Φ je distribuční funkci normálního rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$, jejíž hodnoty je možné najít např. v tabulkách. Zkráceně píšeme

$$Z_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n\mathsf{Var}\,X_1}} = \sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n - \mathsf{E}X_1}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X_1}} \overset{asympt.}{\sim} \mathsf{N}(0,1)$$

a říkáme, že Z_n má asymptoticky normální rozdělení.
CLV nám tedy říká, že distribuční funkce F_n veličiny Z_n se při $n \to \infty$ blíží k Φ. Pro n dost velké tedy lze uvažovat

$$\mathsf{P}\left(Z_n \leq x\right) \doteq \Phi(x).$$

Čebyševova nerovnost: Je-li $X \in L_2$, pak

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| > \varepsilon) < \frac{\mathsf{Var}\,X}{\varepsilon^2} \qquad \text{pro všechna } \varepsilon > 0.$$