Cvičení z NSTP097

Transformace náhodných veličin a vektorů

V.

1 Nechť $X \sim \mathrm{R}(0,1)$. Určete rozdělení $Y = -\dfrac{1}{\theta}\log X$, kde $\theta > 0$.

2 Nechť $X \sim \mathrm{Exp}(1)$. Určete hustotu náh. veličiny $Y = a - b\log X$, kde $b > 0$. (Toto rozdělení se nazývá Gumbelovo).

3 Konvoluce gama rozdělení:

(i) Nechť $X \sim \Gamma(a, p_1)$ a $Y \sim \Gamma(a, p_2)$ jsou nezávislé. Určete rozdělení $Z = X + Y$. [Použijte vlastnosti funkcí beta a gama.]

(ii) Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé a $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, jaké rozdělení má $Z = \sum_{i=1}^n X_i$? [Použijte výsledek bodu (i).]

(iii) Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé a $X_i \sim \chi^2_{m_i}$, jaké rozdělení má $Z = \sum_{i=1}^n X_i$? [Použijte výsledek bodu (i).]

4 Nechť $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ a $Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$ jsou nezávislé. Dokažte, že $Z = X + Y$ má normální rozdělení. Jaké jsou jeho parametry?

[Poznámka navíc: Odtud lze dokázat, že má-li $\boldsymbol{Z}$ m-rozměrné normální rozdělení, pak $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{Z}$ má normální rozdělení pro libovolné $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$.]