Příklady na procvičení z NSTP097

Náhodné veličiny a vektory

III.

1 Pro nezávislé veličiny $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ a $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ spočtěte $\text{P}[X < Y]$.

2 Náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} c\log(1+y), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte konstantu c, marginální hustoty, střední hodnoty a kovarianční matici. Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé.

3 Náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x,y) \in \langle -1, 0\rangle \times \langle 0, 1\rangle, \\ c, & (x,y) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle, \\ \frac{1}{8}, & (x,y) \in \langle -1, 0\rangle \times \langle -1, 0\rangle, \\ \frac{1}{4}, & (x,y) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle -1, 0\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte konstantu c, marginální hustoty, střední hodnoty a kovarianční matici. Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé.

4 Najděte konstantu c tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} c\frac{x^2}{1+y^2} & \text{pro } 2 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

byla hustotou nějakého náhodného vektoru. Určete marginální hustoty a distribuční funkci vektoru.

5 Náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ nechť má rozdělení s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(6 - xy) & \text{pro } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte konstantu c, marginální hustoty, distribuční funkci. Vyšetřete nezávislost X a Y.

6 Hustota náhodného vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(x+y) & \text{pro } 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočítejte

(i) konstantu c a sdruženou distribuční funkci $F(x, y)$ (pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$);

(ii) marginální distribuční funkce a marginální hustoty X a Y;

(iii) střední hodnoty $\mathrm{E}\, X$ a $\mathrm{E}\, Y$ a kovarianci $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Jsou X a Y nezávislé?

7 Hustota náhodného vektoru $(X, Y, Z)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y,z) = \begin{cases} cx^3y^2z & \text{pro } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte konstantu c a hustotu podvektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$. Rozhodněte o nezávislosti X, Y, Z.

8 Uvažujme dva náhodné vektory: $(U, V)^\mathsf{T}$ s rozdělením s hustotou

$$g(u,v) = \tfrac{1}{2\pi} \exp\{-\tfrac{1}{2}(u^2+v^2)\}, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

a $(X, Y)^\mathsf{T}$ s hustotou

$$h(x,y) = \begin{cases} 2g(x,y) & \text{pro } xy \ge 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete marginální rozdělení U a V v rozdělení $(U, V)^\mathsf{T}$ a totéž pro X a Y v rozdělení $(X, Y)^\mathsf{T}$.

9 Podmíněná hustota veličiny X je

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2-1} & \text{pro } 1 \le x \le y,\ 1 \le y \le 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Hustota veličiny Y je

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{9}y(y^2-1) & \text{pro } 1 \le y \le 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte hustotu f_X veličiny X.

10 Náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ má sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2(y+x)^2, & \text{pro } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte podmíněné hustoty.

11 Náhodná veličina T má exponenciální rozdělení s intensitou λ. Podmíněné rozdělení veličiny N za podmínky $T = t$ je Poissonovo s parametrem t, tedy

$$\mathrm{P}\,[\,N = k \mid T = t\,] = \frac{t^k}{k!} e^{-t}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Najděte rozdělení veličiny N.