MOD009 - cvičení 9

Příklad 1: Leze slimák po nekonečně vysokém stromě, za každou hodinu s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ vyleze nahoru o jeden centimetr a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ o jeden centimetr dolů sklouzne. Pokud je na zemi, popoleze o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností 1. Označme X_n výšku (v centimetrech), ve které se slimák nachází po n hodinách.

a) Určete matici pravděpodobností přechodu.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Předpokládejte, že na počátku je slimák na zemi, a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po třech hodinách
d) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).

Návod: (Homogenní lineární diferenční rovnice)

Jak na ně: Homogenní lineární diferenční rovnicí k-tého řádu nazveme rovnici

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \qquad n \geq k, \tag{1}$$

kde c_i jsou dané koeficienty a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost, kterou hledáme. Rovnici

$$\lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \cdots + c_{k-1}\lambda + c_k = 0, \tag{2}$$

nazveme charakteristickou rovnicí homogenní lineární diferenční rovnice (1). Jestliže číslo λ je r-násobným kořenem rovnice (2), pak posloupnosti $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{n\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$, ..., $\{n^{r-1}\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou lineárně nezávislá řešení homogenní lineární diferenční rovnice (1). Každé řešení homogenní lineární diferenční rovnice (1) je pak kombinací těchto řešení.
Z k počátečních podmínek $a_l = const_l$, $l \in \{1, \ldots k\}$ a z normovací podmínky pro pravděpodobnostní rozdělení $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$, pak můžeme určit jednoznačné řešení.

Příklad 2: Řešte soustavy diferenčních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} \pi_0 &= 2 \\ \pi_1 &= \tfrac{4}{3} \\ \tfrac{1}{4}\pi_k + \tfrac{3}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}\pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_0 + \tfrac{3}{4}\pi_2 &= \pi_1 \\ \tfrac{1}{4}\pi_k + \tfrac{3}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

Příklad 3: Řešte soustavy diferenčních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 \\ \pi_1 &= 3 \\ \tfrac{1}{2}\pi_k + \tfrac{1}{2}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_2 &= \pi_1 \\ \tfrac{1}{2}\pi_k + \tfrac{1}{2}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

Příklad 4: Řešte soustavy diferenčních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} \pi_0 &= 3 \\ \pi_1 &= \tfrac{5}{3} \\ \tfrac{3}{4}\pi_k + \tfrac{1}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_2 &= \pi_1 \\ \tfrac{3}{4}\pi_k + \tfrac{1}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

Domácí úloha

Simulování systému bonus-malus

a) Uvažujme verzi systému bonus-malus, který jsme pojmenovali britský systém. Takže předpokládáme, že počet pojistných událostí u každého klienta v daném roce má Poissonovo rozdělení s parametrem λ, a matice pravděpodobností přechodu mezi sedmi kategoriemi pak je rovna

$$P = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}) \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}) \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Spočtěte stacionární rozdělení π pro případ $\lambda = \frac{1}{10}$.

Generujte sedm náhodných realizací řetězce délky 5000 s maticí pravděpodobností přechodu P, pro $\lambda = \frac{1}{10}$, ze sedmi počátečních stavů $1, 2, \ldots, 7$.

Pro každý generovaný řetězec spočtěte empirické četnosti $N_i(5000)/5000$ stavů $i = 1$ až 7. Porovnejte (možno i graficky) obdržené empirické četnosti pro různé počáteční stavy se stacionárním rozdělením π.

Generujte 1000 počátečních stavů podle rozdělení π a z nich generujte průběhy Markovského řetězce jako výše, ale jenom do času 12. Spočítejte četnosti stavů 1 až 7 v generované populaci pro časy $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Porovnejte, jak závisí tyto empirické četnosti na čase (opět možno graficky).

Generujte 1000 průběhů řetězce do času 12, ale nyní mějte všechny z počátečního stavu 6. Stejně jako v předchozím případě spočtěte četnosti stavů 1 až 7 v generované populaci pro časy $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Porovnejte, jak závisí tyto empirické četnosti na čase (opět možno graficky).

Pro obě simulace (s počátečním stavem 6 a s počátečním rozdělením náhodným rovným π) vývoje populace 1000 pojištěnců spočtěte celkové vybrané pojistné (samozřejmě relativně k základu 100%) v časech $t = 1, 2, \ldots, 12$. Nakreslete srovnávací graf pro obě populace. Komentujte, proč graf vypadá právě takto.

b) Simulujte 12 let pojistných událostí pro populaci pojištěnců velikosti 1000. Předpokládejte, že počet škod každého pojištěnce se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = \frac{1}{10}$ a velikost škod (vyjádřených v poměru k základu pojistného) jsou vzájemně nezávislé s lognormálním rozdělením s parametry

(i) $\mu = -0.366$ a $\sigma^2 = 2$,

(ii) $\mu = 0.327$ a $\sigma^2 = 2$.

Uvědomte si, že volby parametrů odpovídají střední hodnotě jednotlivé škody rovné cca 1.885 a 3.77 (neboť střední hodnota log-normálního rozdělení je rovna $\exp(\mu + \sigma^2/2)$), tedy střední hodnotě pojistného vybraného od jednoho pojištěnce krát $\frac{10}{2}$ respektive krát $10 = \lambda$.

Nakreslete graf celkového vybraného pojistného pro případ počátečního rozdělení rovného stacionárnímu (máte z a)) a celkových škod v daných dvanácti letech pro případ (i) a (ii). Můžete nakreslit i kumulativní (přes prvních t let) rozdíly mezi celkovým pojistným a celkovými škodami. Komentujte.