NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Cvičení 3. Intervalové odhady.

A Příklady na cvičení

A1. *[Procvičovací]*

> *Na zastávce Rokoska kdysi stavěla v pravidelných intervalech tramvajová linka č. 3. Student MFF touto linkou jezdil na Florenc. Na zastávku chodil ve zcela náhodných okamžicích, jízdní řády se tenkrát na zastávkách nevystavovaly. Po deseti příchodech na zastávku byla nejdelší doba čekání na tramvaj 11 minut. Spočítejte přesný 95 % interval spolehlivosti pro délku intervalu linky č. 3.*

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, \theta_X)$. Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro θ_X založený na $X_{(n)}$.

A2. *[Procvičovací]*

> *Pan Zoukal je majitelem malé přepravní firmy. V posledním roce desetkrát v různých dnech a hodinách navštívil přepážku evidence vozidel na Oddělení dopravně správních agend městského úřadu v Dobrušce. Celková doba čekání na vyřízení deseti záležitostí pana Zoukala byla 316 minut. Předpokládejte, že doba čekání při každé návštěvě má totéž exponenciální rozdělení a že jednotlivé doby čekání jsou nezávislé. Spočítejte přesný 95 % interval spolehlivosti pro střední dobu čekání na vyřízení jedné záležitosti.*

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem λ_X. Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro $\mathsf{E}\, X_i = 1/\lambda_X$ založený na $\sum_{i=1}^n X_i$.

A3. *[Procvičovací]* Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem λ_X.

(a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\log \lambda_X$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

B Doplňující příklady (nahrazování, procvičování)

B1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, \theta_X)$. Nechť $n = 2k + 1$. Použijte $X_{(k+1)}$ jako bodový odhad mediánu m_X rozdělení X_i a sestrojte přesný interval spolehlivosti pro m_X.

B2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ_X.

(a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\sqrt{\lambda_X}$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro λ_X.

B3. Uvažujme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x; \theta_X)$, kde

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Najděte rozdělení náhodných veličin X_i^2, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

(c) Sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

B4. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p_X. Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro $\theta_X = \log[p_X/(1 - p_X)]$ a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro p_X.

B5. Uvažujme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x; \theta_X)$, kde

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr θ_X.

[Návod: Uvažujte transformaci $Y_i = -\log X_i$]

B6. Máme-li dva nezávislé náhodné výběry $X_1, \ldots, X_n \sim \mathsf{Exp}(\lambda_X)$ a $Y_1, \ldots, Y_m \sim \mathsf{Exp}(\lambda_Y)$. Odvoďte přesný interval spolehlivosti pro parametr $\varrho = \lambda_X/\lambda_Y$.