NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Cvičení 2. Pořádkové statistiky. Nestrannost a konsistence odhadů

A Příklady na cvičení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f.

A1. *[Procvičovací]* Nechť $n = 2k + 1$.

- Najděte hustotu prostředního pozorování $X_{(k+1)}$. [Tato statistika se nazývá výběrový medián.]
- Nechť X_i má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$. Spočítejte $\mathsf{E}\, X_{(k+1)}$ a $\mathsf{var}\, X_{(k+1)}$.
- Nechť $X_i \sim \mathsf{R}(0, \theta)$. Je $X_{(k+1)}$ nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdělení $\mathsf{R}(0, \theta)$? [Použijte tvrzení P.7.5]

A2. *[Instruktážní]* Nechť X_i má exponenciální rozdělení s parametrem 1.

- Definujte
$$Z_1 = nX_{(1)}, \quad Z_k = (n - k + 1)(X_{(k)} - X_{(k-1)}), \quad k = 2, \dots, n.$$
Ukažte, že $Z_1, \dots, Z_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $\mathsf{Exp}(1)$.
- Vyjádřete $X_{(r)}$ pomocí lineární kombinace veličin $Z_1, \dots, Z_n$ a pomocí tohoto vztahu spočítejte $\mathsf{E}\, X_{(r)}$ a $\mathsf{var}\, X_{(r)}$ (pro libovolné $r = 1, \dots, n$).
- Nechť $X_i \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ a $n = 2k + 1$. Je $X_{(k+1)}$ nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$?

A3. *[Procvičovací]* Nechť X_i má rozdělení $\mathsf{R}(\theta_1, \theta_2)$. Najděte nestranné odhady parametrů θ_1 a θ_2 založené na maximu $X_{(n)}$ a minimu $X_{(1)}$.

B Doplňující příklady (nahrazování, procvičování)

B1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{R}(0, \theta)$. Zjistěte, zdali $X_{(n)}$ je nestranným a/nebo konsistentním odhadem parametru θ.

B2. Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ s hustotou
$$f(x) = 3\theta^{-3} x^2 \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \, \theta > 0.$$

(a) Ověřte, že $\widehat{\theta}_n = \frac{4}{3}\overline{X}_n$ je nestranný odhad parametru θ.
(b) Ověřte, že $\widetilde{\theta}_n = \frac{3n+1}{3n} X_{(n)}$ je nestranný odhad parametru θ.
(c) *[Pro nahrazování nepovinný]* Najděte rozptyl $\widehat{\theta}_n$ a $\widetilde{\theta}_n$ a porovnejte rychlost konvergence rozptylů k 0 při $n \to \infty$.

B3. Nechť X_i má rozdělení $\mathsf{Alt}(p)$. Najděte nestranný odhad parametru $\theta = p(1 - p)$ založený na $\overline{X}_n$.

B4. Nechť X_i má rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$. Ukažte, že
$$\widehat{\theta}_n = 1 - \left(1 - \frac{u}{n\overline{X}_n}\right)^{n-1}$$
je nestranným odhadem parametru $\theta = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u} = F_X(u)$.

B5. Uvažujte nezávislé náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots$ s rozdělením $\mathsf{Alt}(p)$.

(a) Ukažte (sporem), že při pevném rozsahu výběru n neexistuje nestranný odhad parametru $\theta = 1/p$ založený na $X_1, \ldots, X_n$.
(b) Nechť Z značí počet počet nul předcházejících první jedničce v posloupnosti $X_1, X_2, \ldots$. Víme, že Z má rozdělení $\mathsf{Geo}(p)$. Ukažte, že $Z + 1$ je nestranným odhadem parametru $\theta = 1/p$.

B6. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{Exp}(1)$ a $U_1, \ldots, U_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{R}(0, 1)$. Ukažte, že $-\log U_{(n-r+1)}$ má stejné rozdělení jako $X_{(r)}$. Pomocí příkladu **A2** ukažte, že

$$Q_r = \left(\frac{U_{(r)}}{U_{(r+1)}} \right)^r$$

jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $\mathsf{R}(0, 1)$.