NMFM301 – Statistika pro finační matematiky

1. Pravděpodobnostní rozdělení a pořádkové statistiky

A Příklady na cvičení

1. Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé. X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 1]$ a Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtěte

$$\mathbb{E}\left[X^2 + Y|Y\right] \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[X^2 + Y|X + Y\right].$$

2. Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé stejně rozdělené veličiny s distribuční funkcí F, určete distribuční funkce veličin $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ a $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Nechť jsou navíc $X_1, \ldots, X_n$ spojité s hustotu f. Najděte hustotu Y a Z.

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z distribuce majíci hustotu f. Najděte sdruženou hustotu náhodného vektoru

$$[\max\{X_1, \ldots, X_n\}, \min\{X_1, \ldots, X_n\}]^\top.$$

4. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $[0, \theta]$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, \ldots, X_n\}}{\theta}$$

má Beta rozdělení. Určete jeho parametry.

B Příklady na procvičování

1. Nechť náhodný vektor $[X, Y]^\top$ má sdruženou hustotu

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} |y|^3, & -1 < x < 1, -1 < y < 1; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = XY^2$.

(b) Spočtěte $\mathbb{E}\sqrt{|Z|}$.

2. Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé a obě mají Poissonovo rozdělení s parametrem 1. Spočtěte

$$\mathbb{E}\left[(2^{3X} + 2^Y)^2|X + Y\right].$$

3. Pro nezávislé veličiny $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ a $Y \sim \mathsf{Exp}(\nu)$

(a) určete rozdělení $Z = \min\{X, Y\}$,

(b) spočtěte $\mathbb{E}\, Z$,

(c) spočtěte $\mathbb{P}\,[X < Y]$.

4. Náhodný vektor $(X, Y)^\top$ má rovnoměrné rozdělení na množině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq 1 - x^2\}.$$

Spočítejte

(a) marginální hustoty X a Y;

(b) podmíněnou hustotu X, je-li dáno Y;

(c) podmíněnou střední hodnotu $\mathbb{E}\,[X|Y]$ a podmíněný rozptyl $\mathsf{Var}\,[X|Y]$;

(d) hustotu náhodné veličiny $Z = \frac{Y}{X^2}$.

5. Náhodný vektor $[X, Y]^\top$ má rovnoměrné rozdělení na množině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, (x + 1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in [0, 2] \times [-1, 1] : (x - 1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

(a) Rozhodněte, zda X a Y jsou nezávislé.

(b) Určete sdruženou hustotu náhodného vektoru $[X, Y]^\top$?

(c) Rozhodněte, zda $|X|$ a $Y + 1$ jsou nezávislé.

6. Nechť $F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $[X, Y]^\top$. Určete distribuční funkci $Z = \max\{X, Y\}$.

7. Rozhodněte, zda minimum a maximum veličin náhodného výběru jsou nezávislé náhodné veličiny.

8. Pro nezávislé stejně rozdělené veličiny $X, Y \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ určete hustotu

$$W = \frac{\min\{X, Y\}}{\max\{X, Y\}}.$$

9. Pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$ definujme *rozsah* výběru

$$V = \max\{X_1, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Spočtěte střední hodnotu rozsahu V.

10. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $[0, \theta]$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že

$$n\left[1 - \frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, \ldots, X_n\}}{\theta}\right] \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad n \to \infty,$$

kde Y má Gamma rozdělení.

11. Nechť náhodná veličina X má Weibullovo rozdělení $\mathsf{Weib}(c, p)$ s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} pcx^{p-1} \exp\{-cx^p\}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}; \end{cases}$$

kde $c > 0$, $p > 0$ jsou parametry.

(a) Určete distribuční funkci.

(b) Určete kvantilovou funkci.

(c) Určete medián.

(d) Určete střední hodnotu.

(e) Určete rozptyl.

12. Uvažme funkci $F(x, y) = \max\{x, y\}$ pro $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Doplňme F na $\mathbb{R}^2$ tak, aby splňovala základní vlastnost distribuční funkce ($0 \leq F(x, y) \leq 1$). To lze udělat např. takto:

$$F(x, y) = \min\Big[\max\big\{\max(x, y), 0\big\}, 1\Big], \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Nyní tedy máme funkci $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$. Zjistěte, zda je F distribuční funkcí nějakého náhodného vektoru.