Teorie pravděpodobnosti 2 (NMSA405)

Zbyněk Pawlas

3. února 2015

1 Náhodná posloupnost

Bude fixován pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a uvážíme posloupnost reálných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, tj. měřitelných zobrazení $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je borelovská σ-algebra prostoru $\mathbb{R}$.

Definice 1.1. Posloupnost $X_1, X_2, \dots$ náhodných veličin se nazývá *náhodná posloupnost.*

Označme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ množinu posloupností reálných čísel. Náhodná posloupnost vytváří zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definované jako

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots), \quad \omega \in \Omega. \tag{1}$$

Nabízí se otázka, jestli je toto zobrazení nějakým způsobem měřitelné.

Definice 1.2. Jsou-li $(S_n, \mathcal{S}_n)$ měřitelné prostory, definujeme *součinovou σ-algebru* $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ podmnožin součinového prostoru $\bigtimes_{n=1}^{\infty} S_n$ jako

$$\mathcal{S} = \sigma\{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times \cdots : A_k \in \mathcal{S}_k, n \in \mathbb{N}\}.$$

Množina tvaru $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times \cdots$ se nazývá *měřitelný válec s konečně rozměrnou podstavou.* Pokud $S_n = S$ a $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, používáme značení $S^{\mathbb{N}} = \bigtimes_{n=1}^{\infty} S_n$ a $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

V naší situaci máme $S_n = \mathbb{R}$ a $\mathcal{S}_n = \mathcal{B}$.

Tvrzení 1.1. *Je-li $X_1, X_2, \dots$ náhodná posloupnost, pak zobrazení X definované v* (1) *je měřitelné ve smyslu $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$.*

Důkaz. Použijeme-li definici 1.2 pro $S_n = \mathbb{R}$ a $\mathcal{S}_n = \mathcal{B}$, stačí ověřit, že $F = [X \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] \in \mathcal{F}$ pro libovolné $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ a $n \in \mathbb{N}$. Platí ale $F = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in A_k]$, a tak $F \in \mathcal{F}$. $\square$

Z prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lze přirozeným způsobem učinit metrický prostor.

Definice 1.3. Definujme vzdálenost reálných posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ a $y = (y_1, y_2, \dots)$ jako

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n| \wedge 1}{2^n},$$

kde $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Poznámka: Všimněme si, že řada v definici metriky d je vždy konvergentní a platí $d(x, y) \le 1$.

Tvrzení 1.2. *Platí následující:*

(a) d *je metrika,*

(b) *posloupnost* $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *konverguje pro* $n \to \infty$ *k posloupnosti* $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *v metrice* d *právě tehdy, když* $x_j^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j$ *pro každé* $j \in \mathbb{N}$,

(c) $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ *je separabilní úplný metrický prostor,*

(d) $\bigtimes_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ *je kompaktní podmnožina* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *pro* $-\infty < a_n \leq b_n < \infty$.

Důkaz. (a), (b), (c) na cvičení,

(d) bez újmy na obecnosti předpokládejme $[a_n, b_n] = [0, 1]$. Uvážíme posloupnost $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ bodů v $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Protože $x_1^1, x_1^2, \dots$ je posloupnost reálných čísel v kompaktním intervalu $[0, 1]$, existuje její podposloupnost $x_1^{n(1,1)}, x_1^{n(1,2)}, \dots, x_1^{n(1,k)}, \dots$, která pro $k \to \infty$ konverguje k $x_1 \in [0, 1]$. Dále existuje podposloupnost $\{n(2, k), k \in \mathbb{N}\}$ vybraná z posloupnosti $\{n(1, k), k \in \mathbb{N}\}$ taková, že $x_2^{n(2,k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_2 \in [0, 1]$. Indukcí postupně zkonstruujeme

$$
\begin{gathered}
x_1^{n(1,1)}, x_1^{n(1,2)}, \dots, x_1^{n(1,k)}, \dots \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_1 \in [0, 1],\\
x_2^{n(2,1)}, x_2^{n(2,2)}, \dots, x_2^{n(2,k)}, \dots \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_2 \in [0, 1],\\
\vdots\\
x_\ell^{n(\ell,1)}, x_\ell^{n(\ell,2)}, \dots, x_\ell^{n(\ell,k)}, \dots \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_\ell \in [0, 1],\\
\vdots
\end{gathered}
$$

tak, že $\{n(\ell+1, k), k \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{n(\ell, k), k \in \mathbb{N}\}$. Diagonální posloupnost $\{n(k, k), k \in \mathbb{N}\}$ je vybranou posloupností každé posloupnosti $\{n(\ell, k), k \in \mathbb{N}\}$. Odsud pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$ máme

$$x_\ell^{n(k,k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_\ell,$$

a tak podle části b) konverguje $x^{n(k,k)} = (x_1^{n(k,k)}, x_2^{n(k,k)}, \dots)$ podle metriky d při $k \to \infty$ k posloupnosti $x = (x_1, x_2, \dots) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Tím jsme dokázali požadovanou kompaktnost. Použili jsme metodu diagonálního Hellyova výběru. □

Nyní se podívejme, jak vypadá σ-algebra $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$.

Věta 1.3. *Platí* $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, *neboli*

$$\sigma\{A_1 \times \dots \times A_n \times \mathbb{R} \times \dots : A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\} = \sigma\{U : U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ otevřená množina}\}.$$

Důkaz. Inkluze $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ je zřejmá. Stačí tedy ukázat, že každá otevřená množina $U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ leží v σ-algebře $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$. Pro každé $x \in U$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že $U = \bigcup_{x\in U} B(x, \delta_x)$, kde $B(x, \delta_x) = \{y : d(y, x) < \delta_x\}$ je otevřená koule v prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o poloměru δ_x. Metrický prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je separabilní (tvrzení 1.2), a tak můžeme z otevřeného pokrytí U vybrat spočetné (Lindelöfova věta), čímž dostaneme $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \delta_{x_k})$, kde $x_k \in U$. K dokončení důkazu stačí ukázat, že $B(x, \delta) \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ pro $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a $\delta > 0$. Pro pevné $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je zobrazení $y \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}(|x_j - y_j| \wedge 1)$ měřitelné vzhledem k $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, a proto $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}(|x_j - y_j| \wedge 1) < \delta\} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$. □

Definice 1.4. Nechť E je metrický prostor. Zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{B}(E))$ budeme nazývat *náhodná veličina* s hodnotami v E.

Důsledek 1.4. *Náhodná posloupnost* $X = (X_1, X_2, \dots)$ *je náhodná veličina s hodnotami v* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Důkaz. Plyne z věty 1.3 společně s tvrzením 1.1. □

Existují některé netriviální pod-σ-algebry σ-algebry $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, se kterými se ještě setkáme.

Definice 1.5. Zobrazení $p : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se nazývá *konečná permutace (řádu n)*, když existuje $n \in \mathbb{N}$ a permutace $(k_1, \dots, k_n)$ prvků množiny $\{1, \dots, n\}$ tak, že

$$p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_n}, x_{n+1}, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Definice 1.6. Zobrazení $s : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dané předpisem

$$s(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

se nazývá *posunutí*.

Definice 1.7. Množina $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ se nazývá *terminální*, když platí implikace

$$x = (x_1, x_2, \dots) \in T, y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : y_k = x_k \text{ pro všechna } k \in \mathbb{N} \text{ až na konečně mnoho } \Rightarrow y \in T.$$

Řekneme, že $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ je *n-terminální*, pokud platí

$$x = (x_1, x_2, \dots) \in T, y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : y_k = x_k \text{ pro } k > n \Rightarrow y \in T.$$

Definice 1.8. Označíme následující systémy množin:

- *n-symetrické množiny*: $\mathcal{S}_n = \{S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : p(S) = S \text{ pro každou konečnou permutaci } p \text{ řádu } n\}$,
- *symetrické množiny*: $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : p(S) = S \text{ pro každou konečnou permutaci } p\}$,
- *množiny invariantní vůči posunutí*: $\mathcal{I} = \{I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : s^{-1}I = I\}$,
- *n-terminální množiny*: $\mathcal{T}_n = \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : T \text{ } n\text{-terminální}\}$.
- *terminální množiny*: $\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : T \text{ terminální}\}$.

Tvrzení 1.5. *(a) Konečná permutace $p : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfismus.*

(b) Posunutí s je spojité zobrazení.

(c) Množina $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ je n-terminální právě tehdy, když existuje $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tak, že $T = \mathbb{R}^n \times T_n$.

(d) Systémy $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$ a $\mathcal{S}$ jsou σ-algebry takové, že $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}_n \subset \mathcal{S}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a proto $\mathcal{I} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Všechny uvedené inkluze jsou ostré.

Důkaz. Na cvičení. □

Náhodná posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ je podle důsledku 1.4 náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a má tedy rozdělení pravděpodobnosti.

Definice 1.9. Buď $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{B}(E))$ náhodná veličina s hodnotami v metrickém prostoru E. Nechť $\mathcal{P}(E)$ značí systém borelovských pravděpodobnostních měr na E. Definujeme $P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ pro $B \in \mathcal{B}(E)$. Pak $P_X \in \mathcal{P}(E)$ se nazývá *rozdělení pravděpodobnosti* náhodné veličiny X.

Rozdělení náhodné posloupnosti $X = (X_1, X_2, \dots)$ je tedy pravděpodobnostní míra P_X na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ definována jako $P_X(B) = \mathbb{P}((X_1, X_2, \dots) \in B)$ pro $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Dále nás bude zajímat, čím je rozdělení náhodné posloupnosti určeno.

Definice 1.10. Řekneme, že množina $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ je *konečně rozměrná*, jestliže existují $n \in \mathbb{N}$ a $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tak, že $B = B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Tvrzení 1.6. *Označme $\mathcal{A}$ systém konečně rozměrných množin z $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Tento systém tvoří algebru, která generuje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, tedy pro její σ-obal platí $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.*

Důkaz. Na cvičení. □

Věta 1.7. *Rozdělení náhodné posloupnosti $X = (X_1, X_2, \dots)$ je jednoznačně určeno tím, že zadáme rozdělení všech náhodných vektorů $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Máme ověřit, že jsou-li $X = (X_1, X_2, \dots)$ a $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ dvě náhodné posloupnosti takové, že $P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{(Y_1,\dots,Y_n)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $P_X = P_Y$. Buď $B = B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konečně rozměrná množina, pak

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in B_n) = \mathbb{P}((Y_1, \dots, Y_n) \in B) = \mathbb{P}(Y \in B) = P_Y(B).$$

Míry P_X a P_Y splývají na algebře $\mathcal{A}$ konečně rozměrných množin, která podle tvrzení 1.6 generuje σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Podle věty o rozšíření míry tak je $P_X = P_Y$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. □

Principiální problém: Předepíšeme konečně rozměrná rozdělení pravděpodobnosti $P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Kdy existuje náhodná posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ taková, že $P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$?

Nutnou podmínku nalezneme snadno.

Definice 1.11. Řekneme, že $\{P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\}$ je *konzistentní systém* rozdělení pravděpodobnosti, když $P_{n+1}(B_n \times \mathbb{R}) = P_n(B_n)$, $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, tj. P_n je marginální rozdělení P_{n+1} pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Rozdělení $P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ je jednoznačně určenou svou distribuční funkcí

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = P_n\big((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]\big), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lehce tak dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 1.8. *Systém $\{P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\}$ je konzistentní právě tehdy, když*

$$\lim_{x_{n+1} \to \infty} F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_n(x_1, \dots, x_n) \quad \textit{pro } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \textit{ a } n \in \mathbb{N},$$

kde F_n označuje distribuční funkci míry P_n.

Je zřejmé, že v principiálním problému musí být $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ konzistentní systém. Tato podmínka, a to netriviálně, je také postačující. Následující dvě věty jsou speciálním případem Daniellovy-Kolmogorovovy věty.

Věta 1.9. (Daniellova věta) *Ke každému konzistentnímu systému $\{P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\}$ existuje náhodná posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ taková, že $P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Věta 1.10. *Ke každému konzistentnímu systému $\{P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\}$ existuje jediná borelovská pravděpodobnostní míra P definovaná na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ taková, že*

$$P(B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = P_n(B_n), \quad B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Větu 1.10 dokážeme v závěru kapitoly. Věta 1.9 je důsledkem věty 1.10.

Důkaz. (věty 1.9) K danému konzistentnímu systému $\{P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\}$ podle věty 1.10 existuje $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tak, že platí (2). Položme $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), P)$ a $X = \text{id}$. Projekce $X_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definované jako

$$X_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = x_n \quad \text{pro } (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

jsou spojité, a tudíž měřitelné ve smyslu $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Určíme rozdělení vektoru $(X_1, \dots, X_n)$:

$$P_{(X_1,\dots,X_n)}(B_n) = \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in B_n) = \mathbb{P}(X \in B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = P(B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = P_n(B_n), \quad B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Náhodná posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ má požadované vlastnosti. □

Definice 1.12. Jsou-li $Q_1, \dots, Q_n$ míry v $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, pak $Q = \bigotimes_{k=1}^{n} Q_k$ označuje jedinou pravděpodobnostní míru v $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ takovou, že $Q(\bigtimes_{k=1}^{n} B_k) = Q_1(B_1) \cdots Q_n(B_n)$ pro $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tato míra se nazývá *součin měr $Q_1, \dots, Q_n$*.

Tvrzení 1.11. *Náhodné veličiny* $X_1, \dots, X_n$ *jsou nezávislé právě tehdy, když* $P_{(X_1,\dots,X_n)} = \bigotimes_{k=1}^{n} P_{X_k}$.

Důkaz. Viz TP1. □

Je okamžitě patrné, že pro posloupnost rozdělení $Q_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je systém $\{P_n = \bigotimes_{k=1}^{n} Q_k, n \in \mathbb{N}\}$ konzistentní. Věta 1.10 zní nyní následovně.

Věta 1.12. *Pro každou posloupnost* $Q_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *existuje jediná pravděpodobnostní míra* $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *taková, že*

$$P(B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \left(\bigotimes_{k=1}^{n} Q_k\right)(B_n), \quad B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}.$$

Větu 1.9 můžeme potom vyslovit následovně.

Věta 1.13. *Pro každou posloupnost* $Q_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *existuje posloupnost nezávislých náhodných veličin* $X = (X_1, X_2, \dots)$ *taková, že* $P_{X_k} = Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, *a* $P_X = \bigotimes_{k=1}^{\infty} Q_k$.

Důkaz. Uvážíme konzistentní systém $\{P_n = \bigotimes_{k=1}^{n} Q_k, n \in \mathbb{N}\}$. Podle věty 1.9 existuje náhodná posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ taková, že $P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_n = \bigotimes_{k=1}^{n} Q_k$, $n \in \mathbb{N}$. Odsud $P_{X_k} = Q_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle tvrzení 1.11. Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots$ jsou tedy nezávislé a mají předepsaná jednorozměrná rozdělení Q_k. Rovnost $P_X = \bigotimes_{k=1}^{\infty} Q_k$ okamžitě plyne z $P_{(X_1,\dots,X_n)} = \bigotimes_{k=1}^{n} Q_k$, $n \in \mathbb{N}$, neboť $\bigotimes_{k=1}^{\infty} Q_k$ je jednoznačně určená pravděpodobnostní míra splňující

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} Q_k\right)(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \cdots) = Q_1(B_1) \cdots Q_n(B_n) = \left(\bigotimes_{k=1}^{n} Q_k\right)(B_1 \times \cdots \times B_n)$$

pro libovolný měřitelný válec $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \cdots$ s konečně rozměrnou podstavou. □

Tedy předepíšeme-li jednorozměrná rozdělení Q_k, vždy existuje posloupnost nezávislých náhodných veličin X_k, které mají rozdělení Q_k. To nám poskytuje matematický model pro posloupnost bernoulliovských pokusů s pravděpodobností úspěchu $p \in [0, 1]$. Rozdělení Q_k jsou alternativní s parametrem p. Je-li $p = 1/2$, můžeme si poradit snadněji.

Definice 1.13. *Dvojkový rozvoj* čísla $x \in (0, 1]$ je posloupnost $x_1, x_2, \dots$ nul a jedniček taková, že v ní nalezneme nekonečně mnoho jedniček a

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Dvojkový rozvoj čísla 0 je posloupnost nul.

Tvrzení 1.14. *Je-li* X *náhodná veličina, která má rovnoměrné rozdělení na intervalu* $[0, 1]$ *a*

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \tag{3}$$

je její dvojkový rozvoj, pak $X_1, X_2, \dots$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením s parametrem* $1/2$.

Obráceně uvažujeme-li posloupnost nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením s parametrem $1/2$ *a definujeme* X *vztahem* (3), *potom* X *má rovnoměrné rozdělení na intervalu* $[0, 1]$.

Důkaz. Na cvičení. □

Budeme se zabývat několika významnými typy náhodných posloupností, které popisují náhodný pohyb částice v časech $n = 1, 2, \dots$

Definice 1.14. Řekneme, že náhodná posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ je

- *iid*, pokud náhodné veličiny X_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou nezávislé a stejně rozdělené,
- *n-symetrická*, pokud rozdělení $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots)$ a $(X_{k_1}, \dots, X_{k_n}, X_{n+1}, \dots)$ jsou stejná pro každou konečnou permutaci $(k_1, \dots, k_n)$ řádu $n \in \mathbb{N}$,
- *symetrická*, pokud je n-symetrická pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *stacionární*, pokud rozdělení $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots)$ a $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ jsou stejná pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklady a vztahy mezi těmito typy jsou přenechány na cvičení. Dalšími důležitými typy jsou markovské řetězce (přednáška Náhodné procesy 1) a martingaly, kterým se budeme podrobněji věnovat v dalších kapitolách.

Na závěr této kapitoly uveďme chybějící důkaz věty 1.10.

Důkaz. (věty 1.10) Mějme konzistentní systém $\{P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\}$. Vztahem (2) definujeme konečně aditivní pravděpodobnost P na algebře $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ konečně rozměrných množin.

Je třeba ověřit, že definice je korektní. Pokud bychom měli konečně rozměrnou množinu vyjádřenou dvěma způsoby jako $B_n \times \mathbb{R}^\mathbb{N} = B_m \times \mathbb{R}^\mathbb{N}$, kde $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ a $m > n$, pak musí být $B_m = B_n \times \mathbb{R}^{m-n}$ a z konzistence plyne, že $P_m(B_m) = P_m(B_n \times \mathbb{R}^{m-n}) = P_n(B_n)$.

Dále ověříme, že P je konečně aditivní pravděpodobnost na $\mathcal{A}$. K tomu si povšimneme, že jsou-li A, B dvě konečně rozměrné množiny, pak existují $n \in \mathbb{N}$ a $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tak, že $A = A_n \times \mathbb{R}^\mathbb{N}$ a $B = B_n \times \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Pro A a B disjunktní jsou zřejmě A_n a B_n disjunktní a platí $A \cup B = (A_n \cup B_n) \times \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Odtud máme

$$P(A \cup B) = P_n(A_n \cup B_n) = P_n(A_n) + P_n(B_n) = P(A) + P(B).$$

Zbývá ukázat, že P je σ-aditivní pravděpodobnost na algebře $\mathcal{A}$, pak totiž podle věty o rozšíření míry existuje právě jedna pravděpodobnostní míra $\bar{P}$ na σ-algebře $\sigma(\mathcal{A})$, která je rozšířením P. Tvrzení 1.6 říká, že algebra $\mathcal{A}$ generuje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$. Rozšíření $\bar{P}$ je proto definováno na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ a má vlastnosti, které požaduje znění věty.

Mějme $A^n = B^n_{k_n} \times \mathbb{R}^\mathbb{N}$ množiny v $\mathcal{A}$ takové, že $A^1 \supseteq A^2 \supseteq \cdots$ a $\cap_{n=1}^\infty A^n = \emptyset$ (zkráceně píšeme $A^n \searrow \emptyset$). Díky monotonii posloupnosti A^n můžeme předpokládat, že množiny $B^n_{k_n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_n})$ jsou takové, že $k_1 < k_2 < \cdots$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je míra $P_{k_n} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{k_n})$ těsná. To znamená, že existuje kompaktní množina $K^n \subseteq B^n_{k_n}$ tak, že $P_{k_n}(B^n_{k_n} \setminus K^n) < \varepsilon/2^n$. Vyrobíme konečně rozměrné množiny $C^n = K^n \times \mathbb{R}^\mathbb{N} \in \mathcal{A}$. Z konstrukce plyne, že $C^n \subseteq A^n$, a tedy $\cap_{n=1}^\infty C^n = \emptyset$.

Tvrdíme, že lze nalézt $m \in \mathbb{N}$, pro které $\cap_{n=1}^m C^n = \emptyset$. Sporem předpokládejme, že $\cap_{n=1}^m C^n \neq \emptyset$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Pak existují posloupnosti $x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tak, že $(x_1^m, \dots, x_{k_n}^m) \in K^n$ pro $n = 1, \dots, m$. Máme posloupnost $\{x^m, m \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ takovou, že každá z posloupností $(x_\ell^1, x_\ell^2, \dots)$ je omezená v $\mathbb{R}$. Podle části d) tvrzení 1.2 má posloupnost $\{x^m, m \in \mathbb{N}\}$ hromadný bod $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Snadno vidíme, že $x \in \cap_{n=1}^\infty C^n$, což je hledaný spor.

Nechť $m \in \mathbb{N}$ je takové, že $\cap_{n=1}^m C^n = \emptyset$. Nyní počítejme

$$P(A^m) = P(A^m \setminus \cap_{n=1}^m C^n) \leq \sum_{n=1}^m P(A^n \setminus C^n) = \sum_{n=1}^m P_{k_n}(B^n_{k_n} \setminus K^n) < \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon.$$

Využili jsme toho, že $A^m \setminus \cap_{n=1}^m C^n \subseteq \cup_{n=1}^m (A^n \setminus C^n)$. Máme tedy $P(A^n) \leq P(A^m) < \varepsilon$ pro $n \geq m$, což vede na $P(A^n) \searrow 0$ pro $n \to \infty$.

Jsou-li $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \dots \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní takové, že $\cup_{k=1}^\infty \tilde{A}^k \in \mathcal{A}$, pak $A^n = \cup_{k=n}^\infty \tilde{A}^k \in \mathcal{A}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $A^n \searrow \emptyset$. Již jsme dokázali, že $P(A^n) \searrow 0$ při $n \to \infty$. Z tohoto faktu a konečné aditivity P můžeme vyvodit, že

$$P\left(\bigcup_{k=1}^\infty \tilde{A}^k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \tilde{A}^k\right) + P(A^n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(\tilde{A}^k) + P(A^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^\infty P(\tilde{A}^k).$$

Dokázali jsme požadovanou σ-aditivitu P, čímž je důkaz hotov. □

2 Markovské časy, filtrace a martingaly

Uvažujeme-li náhodnou posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ jako model náhodného pohybu částice v časech $t = 1, 2, \dots$, pak události, které se částici přihodí či nepřihodí do času n, jsou shromážděny v σ-algebře $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n) = \{[(X_1, \dots, X_n) \in B_n], B_n \in \mathcal{B}^n\}$ a všechny události v σ-algebře $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X) = \{[X \in B], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N})\}$.

Tvrzení 2.1. *Platí* $\sigma(X) = \sigma\left(\cup_{n=1}^\infty \sigma(X_1, \dots, X_n)\right)$.

Důkaz. Na cvičení. □

Definice 2.1. Buď $(\Omega, \mathcal{F})$ měřitelný prostor a $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ neklesající posloupnost σ-algeber. Říkáme, že $(\mathcal{F}_n)$ je *filtrace*. Značíme $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n)$.

Je-li $X = (X_1, X_2, \dots)$ posloupnost náhodných veličin definovaných na $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(\mathcal{F}_n)$ filtrace taková, že $\sigma(X_1, \dots, X_n) \subseteq \mathcal{F}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že posloupnost (X_n) je *adaptována* na filtraci $(\mathcal{F}_n)$ nebo také, že je $\mathcal{F}_n$*-adaptovaná.*

Je-li $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{F}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že $(\mathcal{F}_n)$ je *kanonická filtrace* posloupnosti $X = (X_1, X_2, \dots)$.

Tvrzení 2.2. *Nechť* $X = (X_1, X_2, \dots)$ *je náhodná posloupnost a* $S = (S_1, S_2, \dots)$ *je posloupnost jejich částečných součtů, tj.* $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. *Potom* X *a* S *mají stejnou kanonickou filtraci, tj.* $\sigma(X) = \sigma(S)$.

Důkaz. Na cvičení. □

Pohyb částice zaznamenává některé významné události.

Definice 2.2. Nechť $X = (X_1, X_2, \dots)$ je náhodná posloupnost a $B \in \mathcal{B}$. Označíme $T_B(\omega) = \min\{n : X_n(\omega) \in B\}$, přičemž pokládáme $\min \emptyset = \infty$, a T_B nazveme *čas prvního vstupu posloupnosti* X do množiny B.

Povšimněme si, že

$$[T_B \le n] = \bigcup_{k=1}^n [X_k \in B] \in \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definice 2.3. Zobrazení $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ se nazývá *markovský čas* filtrace $(\mathcal{F}_n)$ nebo také $\mathcal{F}_n$*-markovský čas*, když $[T \le n] \in \mathcal{F}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Je-li $X = (X_1, X_2, \dots)$ náhodná posloupnost, pak $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ se nazývá *markovský čas posloupnosti* X, když $[T \le n] \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ neboli T je markovský čas kanonické filtrace.

Čas T_B prvního vstupu posloupnosti X do $B \in \mathcal{B}$ je markovský čas této posloupnosti, neboť $[T_B \le n] \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tento markovský čas je náhodná veličina, která nepřináší žádnou informaci o chování posloupnosti X po čase T_B.

Hledáme vhodnou definici σ-algebry událostí náhodné posloupnosti X do markovského času T.

Definice 2.4. Buď $(\mathcal{F}_n)$ filtrace a T její markovský čas. Značíme

$$\mathcal{F}_T = \{F \in \mathcal{F}_\infty : F \cap [T \le n] \in \mathcal{F}_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Jedná se o σ-algebru, kterou nazýváme *σ-algebra událostí do času T.*

Je-li $X = (X_1, X_2, \dots)$ náhodná posloupnost a T její markovský čas, budeme o σ-algebře

$$\mathcal{F}_T = \{F \in \sigma(X) : F \cap [T \le n] \in \sigma(X_1, \dots, X_n) \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

mluvit také jako o *historii posloupnosti X do času T.*

V okamžiku $T(\omega) < \infty$ se částice nalézá v bodě $X_{T(\omega)}(\omega)$. Pro $\omega \in \Omega$ budeme značit

$$X_T(\omega) = \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & \text{pro } T(\omega) < \infty, \\ 0 & \text{pro } T(\omega) = \infty. \end{cases}$$

Tvrzení 2.3. *Nechť $(\mathcal{F}_n)$ je filtrace. Pak T je $\mathcal{F}_n$-markovský čas právě tehdy, když $[T = n] \in \mathcal{F}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále platí, že*

$$\mathcal{F}_T = \{F \in \mathcal{F}_\infty : F \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Důkaz. Na cvičení. □

Tvrzení 2.4. (kalkul pro markovské časy) *Nechť $(\mathcal{F}_n)$ je filtrace a S, T jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy. Potom*

a) T a X_T jsou $\mathcal{F}_T$-měřitelné náhodné veličiny,

b) $S \wedge T$, $S \vee T$ a $S + T$ jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy,

c) $T \wedge n$ je $\mathcal{F}_n$-měřitelná náhodná veličina pro každé $n \in \mathbb{N}$,

d) $F \in \mathcal{F}_S \Rightarrow F \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_T$,

e) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$,

f) $[S \leq T], [S = T] \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$,

g) $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$.

Důkaz. a), b), c) Na cvičení.

d) Podle tvrzení 2.3 máme ukázat, že $F \in \mathcal{F}_S \Rightarrow F \cap [S \leq T] \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$F \cap [S \leq T] \cap [T = n] = F \cap [S \leq n] \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n.$$

e) Podle části d) $S \leq T$ a $F \in \mathcal{F}_S$ implikuje, že $F = F \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_T$.

f) Podle d) je $[S \leq T] = \Omega \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_T$. Položíme-li $\lambda = S \wedge T$, pak se jedná o markovský čas podle b), a tedy $\mathcal{F}_{S \wedge T}$-měřitelnou náhodnou veličinu podle a). Protože $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subseteq \mathcal{F}_T$ podle e), zjišťujeme, že λ je $\mathcal{F}_T$-měřitelná náhodná veličina, tudíž $[S \geq T] = [\lambda = T] \in \mathcal{F}_T$. Celkem máme $[S \leq T], [S \geq T] \in \mathcal{F}_T$, a proto také $[S = T] = [S \leq T] \cap [S \geq T] \in \mathcal{F}_T$. Ze symetrie jsou jevy $[S \leq T], [S \geq T], [S = T]$ také v $\mathcal{F}_S$.

g) Podle e) je $F_{S \wedge T} \subseteq F_S \cap F_T$. Mějme $F \in \mathcal{F}_S \cap F_T$, pak

$$F \cap [S \wedge T \leq n] = (F \cap [T \leq S] \cap [T \leq n]) \cup (F \cap [S \leq T] \cap [S \leq n]).$$

Z části f) dostaneme, že $F \cap [T \leq S] \in \mathcal{F}_T$ a $F \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_S$, a proto $F \cap [T \leq S] \cap [T \leq n] \in \mathcal{F}_n$ a $F \cap [S \leq T] \cap [S \leq n] \in \mathcal{F}_n$, což dává $F \cap [S \wedge T \leq n] \in \mathcal{F}_n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ neboli $F \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$. □

Tvrzení 2.5. *a) Nechť T je $\mathcal{F}_n$-markovský čas a $\lambda : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je $\mathcal{F}_T$-měřitelná náhodná veličina taková, že $\lambda \geq T$. Pak λ je $\mathcal{F}_n$-markovský čas.*

b) Mějme náhodnou posloupnost $X = (X_1, X_2, \dots)$ a T její markovský čas. Pro $B \in \mathcal{B}$ definujme $\lambda = \min\{k > T : X_k \in B\}$, jde o čas prvního vstupu do množiny B po čase T. Potom λ je markovský čas posloupnosti X.

Důkaz. Na cvičení. □

Definice 2.5. Nechť $X_1, X_2, \dots$ je iid náhodná posloupnost. Posloupnost součtů $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ se nazývá *náhodná procházka (s krokem X_n).*

Věta 2.6. (silná markovská vlastnost náhodné procházky) *Buď $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ náhodná procházka a $T < \infty$ s.j. její markovský čas. Označme $R_k = S_{T+k} - S_T$ pro $k \in \mathbb{N}$. Pak $(R_1, R_2, \dots) \overset{d}{=} (S_1, S_2, \dots)$ a posloupnost $(R_1, R_2, \dots)$ je nezávislá se σ-algebrou $\mathcal{F}_T$.*

Důkaz. Mějme $n \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{F}_T$ a $B \in \mathcal{B}^n$. Pak

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([(R_1,\dots,R_n) \in B] \cap F) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}([(R_1,\dots,R_n) \in B, T = k] \cap F) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}([(S_{k+1} - S_k,\dots,S_{k+n} - S_k) \in B] \cap [T = k] \cap F) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}((S_{k+1} - S_k,\dots,S_{k+n} - S_k) \in B) \cdot \mathbb{P}([T = k] \cap F) \\
&= \mathbb{P}((S_1,\dots,S_n) \in B) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}([T = k] \cap F) = \mathbb{P}((S_1,\dots,S_n) \in B) \cdot \mathbb{P}(F).
\end{aligned}$$

Volbou $F = \Omega$ dostaneme $\mathbb{P}((R_1,\dots,R_n) \in B) = \mathbb{P}((S_1,\dots,S_n) \in B)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}^n$, což podle věty 1.7 znamená, že se rovnají rozdělení posloupností $(R_1, R_2, \dots)$ a $(S_1, S_2, \dots)$. Dále tím pádem máme $\mathbb{P}([(R_1,\dots,R_n) \in B] \cap F) = \mathbb{P}((R_1,\dots,R_n) \in B) \cdot \mathbb{P}(F)$, takže $(R_1,\dots,R_n)$ a $\mathcal{F}_T$ jsou nezávislé pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, a to je ekvivalentní nezávislosti $(R_1, R_2, \dots)$ a $\mathcal{F}_T$. □

Tvrzení 2.7. (stacionarita vzhledem k markovskému času) *Nechť $(X_1, X_2, \dots)$ je iid náhodná posloupnost a T je markovský čas této posloupnosti takový, že $T < \infty$ s.j. Pak $(X_{T+1}, X_{T+2}, \dots) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \dots)$ a posloupnost $(X_{T+1}, X_{T+2}, \dots)$ je nezávislá se σ-algebrou $\mathcal{F}_T$.*

Důkaz. Obdobně jako v důkazu věty 2.6 vezměme libovolné $n \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{F}_T$ a $B \in \mathcal{B}^n$. Pak

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([(X_{T+1},\dots,X_{T+n}) \in B] \cap F) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}([(X_{T+1},\dots,X_{T+n}) \in B] \cap F \cap [T = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}([(X_{k+1},\dots,X_{k+n}) \in B])\mathbb{P}(F \cap [T = k]) \\
&= \mathbb{P}([(X_1,\dots,X_n) \in B]) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(F \cap [T = k]) \\
&= \mathbb{P}([(X_1,\dots,X_n) \in B])\mathbb{P}(F).
\end{aligned}$$

Volbou $F = \Omega$ dostáváme $\mathbb{P}([(X_{T+1},\dots,X_{T+n}) \in B]) = \mathbb{P}([(X_1,\dots,X_n) \in B])$, a proto také

$$\mathbb{P}([(X_{T+1},\dots,X_{T+n}) \in B] \cap F) = \mathbb{P}([(X_{T+1},\dots,X_{T+n}) \in B])\mathbb{P}(F).$$

□

Tvrzení 2.8. *Nechť $(X_1, X_2, \dots)$ je iid náhodná posloupnost taková, že $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Je-li T markovský čas této posloupnosti splňující $T < \infty$ s.j., pak $(X_1, \dots, X_T, -X_{T+1}, -X_{T+2}, \dots) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \dots)$.*

Důkaz. Náhodná posloupnost $(X_1, \dots, X_T, 0, \dots)$ je $\mathcal{F}_T$-měřitelná, neboť pro libovolnou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$[(X_1, \dots, X_T, 0, \dots) \in B] \cap [T = n] = [(X_1, \dots, X_n, 0, \dots) \in B] \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n,$$

a tak $[(X_1, \dots, X_T, 0, \dots) \in B] \in \mathcal{F}_T$ podle tvrzení 2.3. Náhodné posloupnosti $(0, \dots, 0, X_{T+1}, X_{T+2}, \dots)$ a $(0, \dots, 0, -X_{T+1}, -X_{T+2}, \dots)$ mají stejná rozdělení a podle tvrzení 2.7 jsou nezávislé na $\mathcal{F}_T$. Proto náhodné posloupnosti

$$(X_1, X_2, \dots) = (X_1, \dots, X_T, 0, \dots) + (0, \dots, 0, X_{T+1}, X_{T+2}, \dots)$$

a

$$(X_1, \dots, X_T, -X_{T+1}, -X_{T+2}, \dots) = (X_1, \dots, X_T, 0, \dots) + (0, \dots, 0, -X_{T+1}, -X_{T+2}, \dots),$$

které jsou vyjádřeny součty dvou nezávislých posloupností, mají stejná rozdělení. □

Definice 2.6. Nechť $X_1, X_2, \dots$ je iid náhodná posloupnost taková, že $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Příslušnou náhodnou procházku (S_n) nazýváme *diskrétní symetrická náhodná procházka.*

Tvrzení 2.9. (princip reflexe) *Nechť (S_n) je diskrétní symetrická náhodná procházka. Uvažujme markovský čas T prvního vstupu náhodné procházky do množiny $\{a\}$, kde $a \in \mathbb{N}$. Označíme $S_k^r = 2S_{k\wedge T} - S_k$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $(S_1^r, S_2^r, \dots)$ má stejné rozdělení jako $(S_1, S_2, \dots)$.*

Důkaz. Na cvičení. □

Tvrzení 2.10. (maxima diskrétní symetrické náhodné procházky) *Pro diskrétní symetrickou náhodnou procházku (S_n) označme $M_n = \max_{k=1,\dots,n} S_k$, $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme markovský čas T prvního vstupu náhodné procházky do množiny $\{a\}$, kde $a \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(M_n \geq a) = 2\mathbb{P}(S_n \geq a) - \mathbb{P}(S_n = a) \quad a \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \geq a) = 1.$$

Důkaz. Na cvičení. □

Definice 2.7. Pro $H : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{B}(E))$ zavádíme *σ-algebru generovanou H* jako $\sigma(H) = \{[H \in B], B \in \mathcal{B}(E)\}$. Jde o nejmenší pod-$\sigma$-algebru $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ takovou, že $H : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{B}(E))$.

Definice 2.8. Mějme $H : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{B}(E))$ a $T : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Říkáme, že T je *H-měřitelná náhodná veličina*, když $T : (\Omega, \sigma(H)) \to (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$, tj. $\sigma(T) \subseteq \sigma(H)$.

Tvrzení 2.11. *Náhodná veličina T je H-měřitelná právě tehdy, když existuje $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ tak, že $T = f(H)$.*

Důkaz. Viz TP1. □

Je-li T markovský čas, pak obecně platí $\sigma(T) \subset \mathcal{F}_T$. Pro příklad, kdy je tato inkluze ostrá, stačí uvažovat $T = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathcal{F}_n$ je netriviální σ-algebra. Pak $\sigma(T) = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_T$.

Dříve, než budeme definovat martingal, si připomeneme definici a vlastnosti podmíněné střední hodnoty. Píšeme-li $X \in L_1(\mathcal{F})$, máme na mysli, že X je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a taková, že $\mathbb{E}|X| < \infty$. Pro σ-algebru $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ budeme symbolem $Y \in L_1(\mathcal{G})$ chápat, že Y je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}|_{\mathcal{G}})$ a $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

Definice 2.9. Nechť $X \in L_1(\mathcal{F})$ a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ je σ-algebra. Náhodná veličina $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in L_1(\mathcal{G})$ se nazývá *podmíněná střední hodnota X vzhledem ke $\mathcal{G}$ (za podmínky $\mathcal{G}$)*, když pro každou $G \in \mathcal{G}$ platí

$$\int_G X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Podmíněná střední hodnota $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X$ je určena s.j. jednoznačně.

Tvrzení 2.12. (kalkul pro podmíněnou střední hodnotu) *Pro $X, Y \in L_1(\mathcal{F})$ a pod-σ-algebru $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ platí*

a) $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X + b\mathbb{E}^{\mathcal{G}} Y + c$ *s.j. pro* $a, b, c \in \mathbb{R}$,

b) $X \leq Y$ *s.j.* $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}} Y$ *s.j.,*

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvexní,* $h(X) \in L_1(\mathcal{F}) \Rightarrow h(\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}} h(X)$ *s.j.,*

d) Y *$\mathcal{G}$-měřitelná náhodná veličina,* $X \cdot Y \in L_1(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}} XY = Y \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X$ *s.j. (spec. X $\mathcal{G}$-měřitelná* $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X = X$ *s.j.),*

e) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ *pod-σ-algebra taková, že $\mathcal{D}$ a $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ jsou nezávislé* $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G} \vee \mathcal{D}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *s.j. (značení:* $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$*),*

f) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$ *pod-σ-algebra* $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{D}}\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}\mathbb{E}^{\mathcal{D}} X = \mathbb{E}^{\mathcal{D}} X$ *s.j. (spec.* $\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X) = \mathbb{E}X$*),*

g) $(X, I_G) \stackrel{d}{=} (Y, I_G)\ \forall G \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ *s.j.*

Důkaz. Viz TP1. □

Můžeme také podmiňovat náhodnou veličinou H s hodnotami v metrickém prostoru E, tj. tedy také náhodnou posloupností $H = (H_1, H_2, \dots)$. Pro $X \in L_1(\mathcal{F})$ je $\mathbb{E}[X|H] = \mathbb{E}[X|\sigma(H)]$ podmíněná střední hodnota X za podmínky H. Je určena s.j. jednoznačně podmínkami $\mathbb{E}[X|H]$ je integrovatelná H-měřitelná náhodná veličina a $\int_{[H\in B]} X \,d\mathbb{P} = \int_{[H\in B]} \mathbb{E}[X|H] \,d\mathbb{P}$ pro všechna $B \in \mathcal{B}(E)$. Podle tvrzení 2.11 existuje borelovská funkce $f : E \to \mathbb{R}$ tak, že $\mathbb{E}[X|H] = f(H)$. Značíme $f(h) = \mathbb{E}[X|H = h]$ podmíněnou střední hodnotu X za podmínky $H = h$.

Důležité pro nás budou následující dvě vlastnosti.

Tvrzení 2.13. *Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v metrickém prostoru E_1, Y je náhodná veličina s hodnotami v metrickém prostoru E_2 a $g : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ je borelovská funkce taková, že $g(X, Y) \in L_1(\mathcal{F})$.*

(i) Když $Z \in L_1(\mathcal{F})$ a (Y, Z) a X jsou nezávislé, pak $\mathbb{E}[Z|X, Y] = \mathbb{E}[Z|Y]$.

(ii) Když X a Y jsou nezávislé, pak $\mathbb{E}[g(X, Y)|X = x] = \mathbb{E}g(x, Y)$ pro P_X-s.v. $x \in E_1$.

Důkaz. Viz TP1. □

Při studiu martingalových diferencí budeme potřebovat následující tvrzení.

Tvrzení 2.14. *Pro $X \in L_2(\mathcal{F})$ a σ-algebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ platí*

(i) $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}X \in L_2(\mathcal{G})$, $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}^{\mathcal{G}}X)^2$,

(ii) $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}X)Y = 0$ *pro* $Y \in L_2(\mathcal{G})$,

(iii) $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}X)^2 = \min_{Y\in L_2(\mathcal{G})} \mathbb{E}(X - Y)^2$.

Důkaz. Viz TP1. □

Zobrazení $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} : L_2(\mathcal{F}) \to L_2(\mathcal{G})$ je projekční operátor v Hilbertově prostoru L_2. Označíme-li L_2-normu $\|X\| = \sqrt{\mathbb{E}X^2}$, pak $X - Y = (X - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}X) + (\mathbb{E}^{\mathcal{G}}X - Y)$ je podle části (ii) rozklad na dva kolmé sčítance a

$$\|X - Y\|^2 = \|X - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}X\|^2 + \|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}X - Y\|^2 \geq \|X - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}X\|^2,$$

přičemž rovnost nastává pro $Y = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}X$.

Podstatně vylepšíme pravidlo f) v tvrzení 2.12 pro iterované podmiňování.

Tvrzení 2.15. *Nechť $(\mathcal{F}_n)$ je filtrace, S, T jsou její markovské časy a $Z \in L_1(\mathcal{F})$. Pak*

(i) implikace $S \leq T \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}Z = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z$ platí s.j.,

(ii) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_T}Z = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}Z = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z$ s.j.

Důkaz. (i) Máme dokázat, že existuje $N \in \mathcal{F}$ s $\mathbb{P}(N) = 0$ tak, že pro $\omega \notin N$ platí $S(\omega) \leq T(\omega) \Rightarrow (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}Z)(\omega) = (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z)(\omega)$. Jinými slovy chceme, aby $\mathbf{1}_{[S\leq T]}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}Z = \mathbf{1}_{[S\leq T]}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z$ s.j. Protože podle tvrzení 2.4 je $\mathbf{1}_{[S\leq T]} \in \mathcal{F}_{S\wedge T} \subseteq \mathcal{F}_S$, vzhledem k části d) tvrzení 2.12 potřebujeme ověřit $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\mathbf{1}_{[S\leq T]}Z = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}\mathbf{1}_{[S\leq T]}Z$, což znamená dokázat

$$\int_{F\cap[S\ \leq T]} Z \ d\mathbb{P} = \int_{F\cap[S\ \leq T]} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z \,d\mathbb{P}$$

pro $F \in \mathcal{F}_S$. To ale plyne z definice podmíněné střední hodnoty a toho, že $F\cap[S \leq T] \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S\wedge T}$ podle tvrzení 2.4.

(ii) Máme dokázat, že $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_T}Z$ neboli $\int_F \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z \,d\mathbb{P} = \int_F \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T}Z \,d\mathbb{P}$ pro $F \in \mathcal{F}_S$. Mějme libovolné $F \in \mathcal{F}_S$. Pak podle (i) je

$$\int_{F\cap[S\ \leq T]} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z \ d\mathbb{P} = \int_{F\cap[S\ \leq T]} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}Z \ d\mathbb{P} = \int_{F\cap[S\ \leq T]} Z \ d\mathbb{P} = \int_{F\cap[S\ \leq T]} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T}Z \ d\mathbb{P}.$$

První rovnost plyne z (i), další dvě z toho, že $F \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_S$ a $F \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_T$, což máme z části d) tvrzení 2.4. Dále podle (i) je

$$\int_{F\cap[T<S]} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge T}}Z \ d\mathbb{P} = \int_{F\cap[T<S]} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T}Z \ d\mathbb{P}.$$

□

Podstatná je také spojitost $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ v obou argumentech.

Tvrzení 2.16. *Nechť $X_n, X \in L_1(\mathcal{F})$ a $\mathcal{G}_n, \mathcal{G}$ jsou pod-σ-algebry $\mathcal{F}$.*

a) (spojitost v L_1): $\mathbb{E}|X_n - X| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \mathbb{E}|\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n - \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

b) (spojitost v L_2): $\mathbb{E}|X_n - X|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \mathbb{E}|\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n - \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

c) (stejnoměrná integrovatelnost): je-li posloupnost (X_n) stejnoměrně integrovatelná, pak posloupnost $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}_n]$ je stejnoměrně integrovatelná,

d) (věta o monotónní konvergenci): $0 \le X_n \nearrow X$ s.j. $\Rightarrow 0 \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X$ s.j.,

e) (podmíněné Fatouovo lemma): $X_n \ge 0$, $X = \liminf_{n\to\infty} X_n \in L_1 \Rightarrow 0 \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n$ s.j.,

f) (věta o integrovatelné majorantě): $|X_n| \le Y \in L_1(\mathcal{F})$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X \Rightarrow \mathbb{E}|\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n - \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X$.

Důkaz. a) Z části c) tvrzení 2.12 (Jensenova nerovnost) plyne $|\mathbb{E}^{G} X_n - \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X| \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}}|X_n - X|$. Nyní stačí jen aplikovat střední hodnotu na obě strany nerovnosti.

b) Opět podle Jensenovy nerovnosti máme $|\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n - \mathbb{E}^{G} X|^2 \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}}|X_n - X|^2$, z čehož aplikováním střední hodnoty na obě strany dostáváme spojitost v L_2

c) Nechť $Y_n = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}_n]$. Pak z Jensenovy nerovnosti máme $|Y_n| \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}|X_n|$ a pro pravděpodobnost $\mathcal{G}_n$-měřitelného jevu $[|Y_n| \ge c]$ dostaneme

$$\mathbb{P}(|Y_n| \ge c) \le c^{-1} \int_{[|Y_n|\ge c]} |Y_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \le c^{-1} \int_{[|Y_n|\ge c]} \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}|X_n| \le c^{-1} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|.$$

Tudíž $\mathbb{P}(|Y_n| \ge c) \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0$ stejnoměrně v n. Dále opět z Jensenovy nerovnosti je

$$\int_{[|Y_n|\ge c]} |Y_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_{[|Y_n|\ge c]} \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}|X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{[|Y_n|\ge c]} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Protože X_n mají stejně absolutně spojité integrály, jde pravá strana k nule pro $c \to \infty$ stejnoměrně v n.

d) viz TP1.

e) Aplikujeme část d) na monotónní posloupnost $0 \le \inf_{k\ge n} X_k \nearrow X$ a získáme $0 \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}} \inf_{k\ge n} X_k \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X$. Jelikož $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} \inf_{k\ge n} X_k \le \inf_{k\ge n} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_k$, máme $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n$.

f) Posloupnosti $Y \pm X_n$ jsou nezáporné a podle části e) je

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(Y \pm X) \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}} Y + \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} \pm X_n,$$

což po odečtení $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} Y$ dává $\pm \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \le \pm \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n$ neboli $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n$ a $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n$. Dohromady tedy

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n \le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n \le \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X$$

a všechny nerovnosti musí být rovnostmi. Tím jsme ukázali, že $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X$.

Stejnoměrná integrovatelnost (X_n) a konvergence s.j. implikují konvergenci v L_1. Pak z části a) plyne i konvergence podmíněných středních hodnot v L_1.

□

Nyní již můžeme definovat pojem martingalové posloupnosti náhodných veličin.

Definice 2.10. Buď $X = (X_1, X_2, \dots)$ posloupnost integrovatelných náhodných veličin adaptovaná na filtraci $(\mathcal{F}_n)$. Řekneme, že posloupnost X je $(\mathcal{F}_n)$-*martingal*, když

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \quad \text{s.j.} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Platí-li

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_n] = X_n \quad \text{s.j.} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

tj. když X je $\sigma(X_1, \dots, X_n)$-martingal, říkáme, že posloupnost X je *martingal.*

Je-li v (4) resp. (5) nerovnost $\geq$, říkáme, že posloupnost X je $(\mathcal{F}_n)$-*submartingal* resp. *submartingal.*

Je-li v (4) resp. (5) nerovnost $\leq$, říkáme, že posloupnost X je $(\mathcal{F}_n)$-*supermartingal* resp. *supermartingal.*

Z definice plyne, že martingal má konstantní střední hodnotu. Pro submartingal je $\mathbb{E}X_n$ neklesající posloupnost, zatímco pro supermartingal je nerostoucí.

Povšimněme si, že

$$\begin{aligned}(4) &\iff \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_k] = X_k \quad \text{pro } k \leq n, \\ (5) &\iff \mathbb{E}[X_n \mid X_1, \dots, X_k] = X_k \quad \text{pro } k \leq n.\end{aligned}$$

Stačí použít část b) tvrzení 2.12:

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_k}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{k+1}} \cdots \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}} X_n = X_k.$$

Podobné ekvivalence platí pro submartingal a supermartingal.

Tvrzení 2.17. *(stabilita martingalové vlastnosti)*

(i) Je-li náhodná posloupnost $X_1, X_2, \dots$ $\mathcal{F}_n$-martingal, pak je také $\mathcal{G}_n$-martingal pro každou filtraci $\mathcal{G}_n$ splňující $\sigma(X_1, \dots, X_n) \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$. Speciálně každý $\mathcal{F}_n$-martingal je martingal.

(ii) Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a $\mathcal{D}$ je σ-algebra, která je nezávislá s $\mathcal{F}_\infty$. Pak $X_1, X_2, \dots$ je $(\mathcal{F}_n \vee \mathcal{D})$-martingal.

Důkaz. (i) Podle tvrzení 2.12f) je $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n} X_n = X_n$.

(ii) Podle tvrzení 2.12e) je $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \vee \mathcal{D}] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$.

□

Obdobná tvrzení platí pro submartingaly a supermartingaly.

Závažné příklady martingalů jsou poskytovány pomocí součtů či součinů nezávislých náhodných veličin.

Tvrzení 2.18. *Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost nezávislých integrovatelných náhodných veličin. Označme $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.*

a) Je-li $\mathbb{E}X_n = 0$, pak S_n je martingal. Je-li $\mathbb{E}X_n \geq 0$, pak S_n je submartingal. Je-li $\mathbb{E}X_n \leq 0$, pak S_n je supermartingal.

b) Pokud $X_n \in L_2$, $\mathbb{E}X_n = 0$ a $\mathbb{E}X_n^2 = \sigma^2$, potom $M_n = S_n^2 - n\sigma^2$ je martingal.

c) Jestliže $\mathbb{E}X_n = 1$, pak $Z_n = \prod_{j=1}^n X_j$ je martingal.

d) Pokud $\mathbb{P}(X_n = -1) = q$ a $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, kde $q = 1 - p$ a $p \in (0,1)$, pak $Y_n = (q/p)^{S_n}$ je martingal.

Důkaz. a) Stačí si uvědomit, že

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid S_1, \dots, S_n] = \mathbb{E}[S_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] = S_n + \mathbb{E}X_{n+1}.$$

b) V tomto případě máme

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 \mid S_1, \dots, S_n] = \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 \mid X_1, \dots, X_n] = S_n^2 + 2S_n \mathbb{E}X_{n+1} + \mathbb{E}X_{n+1}^2 = S_n^2 + \sigma^2,$$

a proto

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid S_1, \dots, S_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 \mid S_1, \dots, S_n] - (n+1)\sigma^2 = S_n^2 - n\sigma^2 = M_n,$$

tj. M_n je $\sigma(S_1, \dots, S_n)$-martingal. Vzhledem k tomu, že

$$\sigma(M_1, \dots, M_n) = \sigma(S_1^2, \dots, S_n^2) \subseteq \sigma(S_1, \dots, S_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n),$$

je M_n také martingal podle tvrzení 2.17.

c), d) Na cvičení.

□

Nyní dokážeme tvrzení o submartingalech.

Tvrzení 2.19. *(i) Buď $X_1, X_2, \dots$ $\mathcal{F}_n$-martingal a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní funkce taková, že $g(X_n) \in L_1$. Pak $g(X_1), g(X_2), \dots$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal.*

(ii) Je-li $X_1, X_2, \dots$ $\mathcal{F}_n$-submartingal a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní a neklesající funkce taková, že $g(X_n) \in L_1$. Pak $g(X_1), g(X_2), \dots$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal.

Důkaz. Podle předpokladů je posloupnost $g(X_n)$ $\mathcal{F}_n$-adaptovaná a integrovatelná. Z Jensenovy nerovnosti máme

$$\mathbb{E}[g(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \geq g(\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]).$$

Využitím martingalové resp. submartingalové vlastnosti dostaneme v případě (i)

$$\mathbb{E}[g(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \geq g(\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) = g(X_n) \quad \text{s.j.}$$

a v případě (ii)

$$\mathbb{E}[g(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \geq g(\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \geq g(X_n) \quad \text{s.j.}$$

□

Poznámka: Speciálně pro X_n submartingal je X_n^+ submartingal. Pro X_n martingal a $p \geq 1$ je $|X_n|^p$ submartingal.

Z části a) tvrzení 2.18 víme, že náhodná procházka S_n s centrovanými kroky je martingal. Proto je S_n^2 submartingal a podle příkladu b) z tvrzení 2.18 se dá rozložit na martingal a rostoucí posloupnost: $S_n^2 = M_n + n\sigma^2$. Podobný rozklad lze provést pro každý submartingal.

Definice 2.11. Buď $(\mathcal{F}_n)$ filtrace. Posloupnost $I_1, I_2, \dots$ náhodných veličin je *$\mathcal{F}_n$-predikovatelná*, pokud I_n je $\mathcal{F}_{n-1}$-měřitelná pro každé $n \in \mathbb{N}$, přičemž pokládáme $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Poznámka: Každý $\mathcal{F}_n$-predikovatelný $\mathcal{F}_n$-martingal M_n je konstantní s.j. Musí totiž platit $M_n = \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_{n+1}$ s.j.

Věta 2.20. *(Doobův rozklad) Nechť S_n je $\mathcal{F}_n$-submartingal. Pak existuje $\mathcal{F}_n$-martingal M_n a neklesající $\mathcal{F}_n$-predikovatelná posloupnost I_n taková, že $S_n = M_n + I_n$. Sčítanci M_n a I_n jsou určeny s.j. jednoznačně při dodatečné podmínce $I_1 = 0$.*

Důkaz. Označme diference D_n posloupnosti S_n jako $D_1 = S_1$ a $D_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Ze submartingalové vlastnosti ihned vidíme, že $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} D_{n+1} \geq 0$ s.j. Položme $Z_1 = 0$ a $Z_{n+1} = (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} D_{n+1})^+$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom $Z_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} D_{n+1}$ s.j. a Z_n je $\mathcal{F}_n$-predikovatelná posloupnost. Dále definujme $Y_n = D_n - Z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nyní přejdeme ke kumulativním součtům a zavedeme

$$M_n = \sum_{k=1}^n Y_k, \quad I_n = \sum_{k=1}^n Z_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^n D_k = \sum_{k=1}^n Y_k + \sum_{k=1}^n Z_k = M_n + I_n.$$

Víme, že $I_1 = Z_1 = 0$ a $I_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} Z_k$ je $\mathcal{F}_n$-měřitelná pro $n \in \mathbb{N}$. Tedy I_n je $\mathcal{F}_n$-predikovatelná posloupnost, která je navíc neklesající, protože $Z_n \geq 0$. Náhodná posloupnost $M_n = S_n - I_n$ je $\mathcal{F}_n$-adaptovaná, neboť se jedná o rozdíl adaptované a predikovatelné posloupnosti. Navíc je také integrovatelná. Ověříme, že splňuje martingalovou vlastnost:

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1} - M_n) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} Y_{n+1} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(D_{n+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}^n} D_{n+1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} D_{n+1} - \mathbb{E}^{\mathcal{F}^n} D_{n+1} = 0 \quad \text{s.j.},$$

tedy $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} M_{n+1} = M_n$ s.j. a M_n je $\mathcal{F}_n$-martingal. Tím jsme našli hledaný rozklad $S_n = M_n + I_n$ na $\mathcal{F}_n$-martingal a neklesající $\mathcal{F}_n$-predikovatelnou posloupnost.

Abychom ukázali jednoznačnost, předpokládejme dva rozklady $S_n = M_n + I_n = N_n + J_n$. Pak $\bar{M}_n = M_n - N_n = J_n - I_n$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a zároveň $\mathcal{F}_n$-predikovatelná posloupnost. Podle poznámky před větou tak musí jít o konstantní posloupnost s.j. Při podmínce $I_1 = J_1 = 0$ je tato konstanta nula, a tak $M_n = N_n$ a $I_n = J_n$ s.j. □

Definice 2.12. Posloupnost I_n z Doobova rozkladu se nazývá *kompenzátor* submartingalu S_n.

Tvrzení 2.21. *(Martingalové diference L_2-martingalu jsou ortogonální v L_2) Nechť M_n je $\mathcal{F}_n$-martingal takový, že $M_n \in L_2$ pro $n \in \mathbb{N}$. Označíme $D_1 = M_1$ a $D_{n+1} = M_{n+1} - M_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom $\mathbb{E} D_n D_m = 0$ pro $m \neq n$, a tudíž $\mathbb{E} M_n^2 = \sum_{j=1}^n \mathbb{E} D_j^2$ a $\operatorname{var} M_n = \sum_{j=1}^n \operatorname{var} D_j$.*

Důkaz. Na cvičení. □

3 Věty o zastavení a maximální nerovnosti

Stopping problém: Mějme martingal $X_1, X_2, \dots$ a posloupnost $T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ jeho markovských časů. Uvažujme posloupnost $X_{T_1}, X_{T_2}, \dots$ danou zastavením martingalu v těchto markovských časech. Dostaneme tímto opět martingal?

V situaci $T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq K < \infty$ je odpověď kladná.

Věta 3.1. *Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a S, T jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy takové, že $S \leq T \leq K < \infty$ pro nějaké $K \in \mathbb{N}$. Pak $X_S, X_T \in L_1$ a*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_T = X_S \quad \text{s.j.}$$

Pokud je $X_1, X_2, \dots$ $\mathcal{F}_n$-submartingal, pak máme nerovnost

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_T \geq X_S \quad \text{s.j.}$$

Důkaz. Tvrzení budeme dokazovat pro submartingal. Integrovatelnost X_S a X_T plyne z jednoduchého odhadu

$$|X_T| \leq \max_{j=1,\dots,K} |X_j| \leq \sum_{j=1}^K |X_j| \in L_1.$$

Předpokládejme nejprve $T - S \leq 1$. Pro $F \in \mathcal{F}_S$ platí

$$\int_F (X_T - X_S)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{K-1} \int_{F \cap [S=j] \cap [T>j]} (X_{j+1} - X_j)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \geq 0,$$

protože $H = F \cap [S = j] \cap [T > j] \in \mathcal{F}_j$.

V obecném případě spojíme S a T konečným řetězem markovských časů $V_j = (S + j) \wedge T$, pro které platí $V_{j+1} - V_j \leq 1$ a $S = V_0 \leq V_1 \leq \cdots \leq V_K = T$. Iterovaným použitím již dokázané části tvrzení pak dostaneme

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_T = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{V_0}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{V_1}} \cdots \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{V_{K-1}}} X_T \geq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{V_0}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{V_1}} \cdots \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{V_{K-2}}} X_{V_{K-1}} \geq \cdots \geq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{V_0}} X_{V_1} \geq X_S.$$

□

Důsledek 3.2. *(věta o zastavení = optional stopping theorem) Nechť $X = (X_1, X_2, \dots)$ je $\mathcal{F}_n$-martingal (resp. $\mathcal{F}_n$-submartingal) a T je $\mathcal{F}_n$-markovský čas. Zastavením posloupnosti X v čase T dostaneme náhodnou posloupnost $X^T = (X_{T \wedge 1}, X_{T \wedge 2}, \dots)$, která je $\mathcal{F}_n$-martingal (resp. $\mathcal{F}_n$-submartingal).*

Důkaz. Náhodné veličiny $X_{T\wedge k}$ jsou $\mathcal{F}_{T\wedge k}$-měřitelné (tvrzení 2.4a), a tudíž také $\mathcal{F}_k$-měřitelné ($\mathcal{F}_{T\wedge k} \subseteq \mathcal{F}_k$ podle tvrzení 2.4e). Takže X^T je $\mathcal{F}_n$-adaptovaná posloupnost. Podle věty 3.1 jsou $X_{T\wedge k}$ integrovatelné náhodné veličiny. Zbývá ověřit martingalovou (resp. submartingalovou) vlastnost. Předpokládejme, že $X_1, X_2, \dots$ je submartingal. Pak podle věty 3.1 a tvrzení 2.15 platí

$$X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{T\wedge n}} X_{T\wedge(n+1)} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_T} X_{T\wedge(n+1)} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{T\wedge(n+1)}.$$

V posledním kroku jsme využili toho, že $X_{T\wedge(n+1)}$ je $\mathcal{F}_T$-měřitelná náhodná veličina podle tvrzení 2.4. □

Tvrzení 3.3. *Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal a $S \leq T$ jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy. Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_{T\wedge n} \geq X_{S\wedge n} \quad s.j.$$

Důkaz. Podobně jako v předešlém důkazu podle tvrzení 2.4, tvrzení 2.15 a věty 3.1 platí

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_{T\wedge n} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} X_{T\wedge n} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{S\wedge n}} X_{T\wedge n} \geq X_{S\wedge n} \quad \text{s.j.}$$

□

Příklad: Buď S_n diskrétní symetrická náhodná procházka, T její první vstup do množiny $\{a\}$, kde $a \in \mathbb{N}$. Víme, že S_n je martingal a T je jeho markovský čas, který je s.j. konečný. V tomto případě máme $\mathbb{E}S_T = a > 0 = \mathbb{E}S_1$, a tak věta 3.1 pro neomezený markovský čas obecně neplatí.

Věta 3.4. *(i) Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a $S \leq T < \infty$ s.j. jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy takové, že*

$$X_T \in L_1 \quad a \quad \int_{[T>n]} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6}$$

Pak $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_T = X_S$ s.j.

(ii) Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal a $S \leq T < \infty$ s.j. jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy takové, že

$$X_T^+ \in L_1 \quad a \quad \int_{[T>n]} X_n^+ \,\mathrm{d}\mathbb{P} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{7}$$

Pak $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_T \geq X_S$ s.j.

Důkaz. Dokážeme pouze část (ii), důkaz pro martingal probíhá zcela analogicky.

Je-li X_n $\mathcal{F}_n$-submartingal a $X_T^+ \in L_1$, pak také $X_T \in L_1$, neboť, jak ukážeme, platí $X_T^- \in L_1$. Dle věty 3.2 je $X_{T\wedge n}$ $\mathcal{F}_n$-submartingal, a proto má neklesající střední hodnotu. Speciálně platí $\mathbb{E}X_{T\wedge n} \geq \mathbb{E}X_1$. Pro zápornou část tak dostáváme odhad

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n}^- = \mathbb{E}X_{T\wedge n}^+ - \mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_{T\wedge n}^+ - \mathbb{E}X_1.$$

Z Fatouova lemmatu pak dostaneme

$$\mathbb{E}X_T^- \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{n\wedge T}^- \leq \mathbb{E}X_T^+ - \mathbb{E}X_1 < \infty.$$

Předpokládejme nejprve, že $S \leq K < \infty$ pro nějaké $K \in \mathbb{N}$, pak podle věty 3.1 je $X_S \in L_1$. Máme ukázat, že

$$\int_F X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \geq \int_F X_S \,\mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{pro} \quad F \in \mathcal{F}_S. \tag{8}$$

Protože $F \cap [S \leq n] = F \cap [S \leq S \wedge n] \in \mathcal{F}_{S\wedge n}$ podle tvrzení 2.4d), pak z věty 3.1 dostáváme

$$\int_{F\cap[S\leq n]} X_{T\wedge n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \geq \int_{F\cap[S\leq n]} X_{S\wedge n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{F\cap[S\leq n]} X_S \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Pro $n \to \infty$ konverguje pravá strana k $\int_F X_S \,\mathrm{d}\mathbb{P}$, protože $S < \infty$ s.j. a $X_S \in L_1$. Levou stranu rozepíšeme jako

$$\int_{F\cap[S\leq n]} X_{T\wedge n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{F\cap[S\leq n]\cap[T\leq n]} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{F\cap[S\leq n]\cap[T>n]} X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Protože $S \leq T < \infty$ s.j. a $X_T \in L_1$, máme pro první sčítanec

$$\int_{F\cap[S\leq n]\cap[T\leq n]} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{F\cap[T\leq n]} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_F X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Pro druhý sčítanec podle (6) je

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{F\cap[S\leq n]\cap[T>n]} X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{F\cap[S\ \leq n]\cap[T>n]} X_n^+ \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{[T>n]} X_n^+ \,\mathrm{d}\mathbb{P} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Celkem tedy

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{F\cap[S\leq n]} X_{T\wedge n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_F X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

z čehož dostaneme

$$\int_F X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{F\cap[S\leq n]} X_{T\wedge n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{F\cap[S\leq n]} X_{S\wedge n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X_S \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Neboli jsme ukázali, že $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_T \geq X_S$ s.j. v případě omezeného času S. Speciálně tedy platí $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{T\wedge k}} X_T \geq X_{T\wedge k}$ s.j., a proto $|X_{T\wedge k}| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{T\wedge k}} |X_T|$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Nyní se vraťme k obecnému případu neomezeného času S a ukážeme, že $X_S \in L_1$. Protože jev $[S = k] = [S = k] \cap [T \geq k] \in \mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T\wedge k}$, máme odhad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_S| &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_k| \mathbf{1}_{[S=k]} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_k| \mathbf{1}_{[S=k\leq T]} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_{T\wedge k}| \mathbf{1}_{[S=k\leq T]} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_T| \mathbf{1}_{[S=k\leq T]} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_T| \mathbf{1}_{[S=k]} = \mathbb{E}|X_T| < \infty.
\end{aligned}$$

Při dokazování nerovnosti (8) v případě omezeného času S jsme využili pouze (6) a toho, že $X_S \in L_1$. Protože jsme právě zjistili, že $X_S \in L_1$, můžeme stejné argumenty zopakovat a tím ověřit, že za předpokladů věty (8) platí. Tím je důkaz hotov.

□

Tvrzení 3.5. *Podmínka* (6) *je ekvivalentní tomu, že zastavená posloupnost* $X^T = (X_{T\wedge 1}, X_{T\wedge 2}, \dots)$ *je stejnoměrně integrovatelná. Obdobně platí, že podmínka* (7) *je ekvivalentní tomu, že posloupnost* $(X^+_{T\wedge n})$ *je stejnoměrně integrovatelná.*

Důkaz. Na cvičení. □

Nabízí se otázka, jak ověřovat podmínku (6) příp. podmínku (7) nebo jejich ekvivalentní vyjádření přes stejnoměrnou integrovatelnost. Uveďme některé důležité případy, kdy je podmínka (6) splněna.

Věta 3.6. *Buď* $X_1, X_2, \dots$ $\mathcal{F}_n$*-martingal a* $S \leq T < \infty$ *s.j.* $\mathcal{F}_n$*-markovské časy. Uvažme podmínky:*

$$\exists 0 < c < \infty : \quad T \geq n \Rightarrow |X_n| \leq c \quad \textit{s.j.}, \tag{9}$$

tj. do události v čase T *se trajektorie* $X_1, X_2, \dots$ *nachází v pásu* $[-c, c]$ *s.j.;*

$$(\exists 0 < c < \infty : \quad T > n \Rightarrow |X_{n+1} - X_n| \leq c \quad \textit{s.j.}) \quad \textit{a} \quad \mathbb{E}T < \infty, \tag{10}$$

tj. před událostí v čase T *jsou přírůstky* $|X_{n+1} - X_n|$ *stejně omezené s.j. a čas* T *je integrovatelný;*

$$\big(\exists 0 < c < \infty : \quad T > n \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}|X_{n+1} - X_n| \leq c \quad \textit{s.j.}\big) \quad \textit{a} \quad \mathbb{E}T < \infty, \tag{11}$$

tj. před událostí v čase T *jsou podmíněné přírůstky stejně omezené s.j. a čas* T *je integrovatelný. Pak každá z podmínek* (9), (10) *a* (11) *implikuje, že*

$$X_T \in L_1 \quad \textit{a} \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_S} X_T = X_S.$$

Důkaz. Podmínka (10) implikuje podmínku (11), neboť $\mathbf{1}_{[T>n]}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}|X_{n+1} - X_n| = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}\mathbf{1}_{[T>n]}|X_{n+1} - X_n| \leq c$ s.j. Ověříme, že (9) i (11) implikují (6) a díky větě 3.4 budeme s důkazem hotovi.

Předpokládejme, že je splněna podmínka (9). Potom

$$\int_{[T>n]} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq c\mathbb{P}(T > n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\mathbb{P}(T = \infty) = 0.$$

Integrovatelnost X_T plyne například z toho, že se jedná o limitu omezené posloupnosti $X_{T\wedge n}$ (platí $|X_{T\wedge n}| \leq c$). Proto z Lebesgueovy věty o integrovatelné majorantě je

$$\mathbb{E}|X_T| = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_{T\wedge n}| \leq c < \infty.$$

Nyní předpokládejme, že je splněna podmínka (11). Položme $Y_n = |X_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |X_{k+1} - X_k|$. Pak $|X_n| \leq Y_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a

$$0 \leq |X_T| \leq Y_T = |X_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |X_{k+1} - X_k|\mathbf{1}_{[T>k]} \quad \text{s.j.}$$

Uvědomíme-li si, že z podmínky (11) plyne

$$\mathbb{E}|X_{k+1} - X_k|\mathbf{1}_{[T>k]} = \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_k}|X_{k+1} - X_k|)\mathbf{1}_{[T>k]} \leq c\mathbb{P}(T > k),$$

dostaneme

$$\mathbb{E}|X_T| \leq \mathbb{E}Y_T \leq \mathbb{E}|X_1| + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_{k+1} - X_k|\mathbf{1}_{[T>k]} \leq \mathbb{E}|X_1| + c\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T > k) \leq \mathbb{E}|X_1| + c\mathbb{E}T < \infty,$$

tedy $X_T \in L_1$. Zároveň jsme ukázali i $Y_T \in L_1$, což nám pomůže ukázat druhou část podmínky (6):

$$\int_{[T>n]} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{[T>n]} Y_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{[T>n]} Y_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Poznámka: Pro submartingal bychom mohli zformulovat podobné postačující podmínky zaručující platnost (7).
Poznámka: V podmínce (9) nemůžeme nahradit $T \geq n$ za $T > n$ (viz cvičení).

V aplikacích často uvažujeme markovský čas prvního výstupu posloupnosti z nějaké omezené borelovské množiny. Pak je podmínka (9) automaticky splněna.

Věta 3.7. *(věta o probuzení = optional sampling theorem)*

(i) Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a $T_1 \leq T_2 \leq \dots < \infty$ s.j. jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy. Pokud pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$X_{T_k} \in L_1 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[T_k>n]} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0,$$

potom $(X_{T_1}, X_{T_2}, \dots)$ je $\mathcal{F}_{T_n}$-martingal.

(ii) Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal a $T_1 \leq T_2 \leq \dots < \infty$ s.j. jsou $\mathcal{F}_n$-markovské časy. Pokud pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$X_{T_k}^+ \in L_1 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[T_k>n]} X_n^+ \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0,$$

potom $(X_{T_1}, X_{T_2}, \dots)$ je $\mathcal{F}_{T_n}$-submartingal.

Důkaz. Adaptovanost plyne z tvrzení 2.4. Integrovatelnost se v případě (i) přímo předpokládá a v případě (ii) plyne z důkazu věty 3.4. Martingalovou resp. submartingalovou vlastnost získáme použitím věty 3.4 pro každé $k \in \mathbb{N}$. □

Poznámka: Podle tvrzení 3.5 bychom mohli podmínky ve znění věty ekvivalentně přepsat pomocí stejnoměrné integrovatelnosti zastavené posloupnosti $(X_{T_k \wedge n}, n \in \mathbb{N})$ resp. $(X^+_{T_k \wedge n}, n \in \mathbb{N})$.

Závažnou aplikaci poskytuje následující věta.

Věta 3.8. *Buď $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ náhodná procházka a $T \in L_1$ její markovský čas. Pak*

a) $X_1 \in L_1 \Longrightarrow S_T = \sum_{k=1}^T X_k \in L_1$ *a* $\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1$,

b) $X_1 \in L_2$, $\mathbb{E}X_1 = 0$ *a* $\exists c \in (0, \infty)$ *tak, že platí* ($T > n \Rightarrow |S_n| \le c$ *s.j.*) $\forall n \in \mathbb{N}$, *potom*

$$\operatorname{var} S_T = \mathbb{E}S_T^2 = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{E}T \cdot \operatorname{var} X_1.$$

Důkaz. a) Dle tvrzení 2.18a) je $Y_n = S_n - n\mathbb{E}X_1$ martingal. Dále je

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}|Y_{n+1} - Y_n| = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}|X_{n+1} - \mathbb{E}X_1| = \mathbb{E}|X_1 - \mathbb{E}X_1| = c < \infty,$$

kde $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Pro Y_n je tedy splněna podmínka (11) ve větě 3.6 a odsud

$$\mathbb{E}Y_T = \mathbb{E}Y_1 = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(S_T - T\mathbb{E}X_1) = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}S_T = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1.$$

b) Dle tvrzení 2.18b) je $M_n = S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2$ martingal. Opět ověříme podmínku (11):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}|M_{n+1} - M_n| &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}|2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2 - \mathbb{E}X_1^2| \\ &\le \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}2|S_n||X_{n+1}| + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}X_{n+1}^2 + \mathbb{E}X_1^2 = 2|S_n|\mathbb{E}|X_1| + 2\mathbb{E}X_1^2.\end{aligned}$$

Pak

$$\mathbf{1}_{[T>n]}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}|M_{n+1} - M_n| \le 2\mathbf{1}_{[T>n]}|S_n|\mathbb{E}|X_1| + 2\mathbb{E}X_1^2 \le 2c\mathbb{E}|X_1| + 2\mathbb{E}X_1^2 < \infty \quad \text{s.j.}$$

a podle věty 3.6 je

$$0 = \mathbb{E}M_1 = \mathbb{E}M_T = \mathbb{E}(S_T^2 - T\mathbb{E}X_1^2) = \mathbb{E}S_T^2 - \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2,$$

z čehož plyne $\mathbb{E}S_T^2 = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2$.

□

Poznámka: Vztah $S_T = \sum_{k=1}^T X_k$ platí pouze s.j. (na $[T < \infty]$).

Poznamenejme, že věta 3.8 má „primitivnější“ verzi.

Tvrzení 3.9. *(Waldovy rovnosti) Nechť $S_1, S_2, \dots$ je náhodná procházka a $T \in L_1$ její markovský čas nezávislý s $(S_1, S_2, \dots)$. Pak*

a) $X_1 \in L_1 \Longrightarrow \mathbb{E}S_T = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1$,

b) $X_1 \in L_2$, $\mathbb{E}X_1 = 0 \Longrightarrow \operatorname{var} S_T = \mathbb{E}S_T^2 = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{E}T \cdot \operatorname{var} X_1$.

Důkaz. Označme $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n \vee \sigma(T)$. Pak T je $\mathcal{G}_n$-markovský čas a $Y_n = S_n - n\mathbb{E}X_1$ je $\mathcal{G}_n$-martingal (podle tvrzení 2.17). Důkaz části a) pak probíhá obdobně jako v důkazu části a) věty 3.8. Také bychom mohli postupovat přímo rozepsáním a využitím nezávislosti (viz TP1).

Pro důkaz části b) lze přímo ukázat:

$$\mathbb{E}S_T^2 = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[T=k]}S_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(T=k)\mathbb{E}S_k^2 = \mathbb{E}X_1^2\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2.$$

□

Následující věta dává aplikaci předchozí zastavovací teorie.

Věta 3.10. *(bankrot je definitivní) Nechť $X_1, X_2, \dots$ je nezáporný supermartingal. Uvažujme $T = \min\{n : X_n = 0\}$, přičemž $\min\emptyset = \infty$. Pak implikace ($T < \infty \Rightarrow X_{T+k} = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$) platí s.j.*

Důkaz. Je-li $T = \infty$ s.j. není co dokazovat. Nechť $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$ a položme $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(T \leq n) > 0\}$. Vezměme $n \geq n_0$ a $k \in \mathbb{N}$. Označme $T_n = T \wedge n$. Pak $T_n \leq T_n + k \leq n + k$ jsou markovské časy a podle varianty věty 3.1 pro supermartingal máme

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{T_n}} X_{T_n+k} \leq X_{T_n} \quad \text{s.j.}$$

Protože $[T \leq n] \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{T_n}$ podle tvrzení 2.4, platí

$$0 \leq \int_{[T\leq n]} X_{T+k} \, d\mathbb{P} = \int_{[T\leq n]} X_{T_n+k} \, d\mathbb{P} \leq \int_{[T\leq n]} X_{T_n} \, d\mathbb{P} = \int_{[T\leq n]} X_T \, d\mathbb{P} = 0.$$

Tedy $X_{T+k}\mathbf{1}_{[T\leq n]} = 0$ s.j. Limitou pro $n \to \infty$ získáme $X_{T+k}\mathbf{1}_{[T<\infty]} = 0$ s.j. Neboli existuje $\mathbb{P}$-nulová množina N_k taková, že $X_{T+k}(\omega)\mathbf{1}_{[T(\omega)<\infty]} = 0$ pro $\omega \notin N_k$. Odtud plyne, že posloupnost $(X_{T+k}(\omega)\mathbf{1}_{[T(\omega)<\infty]}, k \in \mathbb{N})$ je rovná nulové posloupnosti pro $\omega \notin N = \cup_{k=1}^{\infty} N_k$. Přitom $\mathbb{P}(N) = 0$. □

Aplikace předchozí teorie na diskrétní náhodnou procházku bude probrána na cvičení.

Definice 3.1. Řekneme, že náhodná procházka S_n s krokem X_n je *netriviální*, jestliže $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$.

Ze cvičení víme, že netriviální náhodná procházka S_n má jednu z následujících vlastností: 1. $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} \infty$, 2. $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} -\infty$, 3. $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ a $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ s.j. Speciálně, je-li T^B první výstup netriviální náhodné procházky z omezené borelovské množiny $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pak $T^B < \infty$ s.j. Dokonce platí, že T^B má všechny momenty konečné.

Věta 3.11. *Nechť $T^B = \min\{n : X_n \notin B\}$ je čas prvního výstupu netriviální náhodné procházky S_n z omezené borelovské množiny $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pak $\mathbb{E}(T^B)^r < \infty$ pro každé $r \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Na cvičení. □

S využitím věty 3.11 dostáváme průhlednou verzi věty 3.8.

Věta 3.12. *Nechť S_n je netriviální náhodná procházka a T její první výstup z některé omezené borelovské množiny. Pak*

a) $X_1 \in L_1 \implies S_T = \sum_{k=1}^{T} X_k \in L_1$ *a* $\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1$,

b) $X_1 \in L_2$, $\mathbb{E}X_1 = 0 \implies S_T \in L_2$ *a* $\operatorname{var} S_T = \mathbb{E}S_T^2 = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{E}T \cdot \operatorname{var} X_1$.

Důkaz. Jedná se o důsledek věty 3.8, protože T je integrovatelný markovský čas a platí $T > n \Rightarrow |S_n| \leq c$ s.j. □

Tvůrcem martingalové teorie byl významný americký matematik J. L. Doob (1910–2004). Zformulujeme dvě maximální nerovnosti, které nesou jeho jméno. Ještě dříve ale dokažme jedno lemma.

Lemma 3.13. *Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je nezáporný submartingal. Označíme-li $M_n = \max\limits_{k=1,\ldots,n} X_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak*

$$\mathbb{P}(M_n \geq a) \leq a^{-1} \int_{[M_n \geq a]} X_n \, d\mathbb{P} \leq a^{-1}\mathbb{E}X_n.$$

Důkaz. Definujme $F_k = [X_1 < a, \ldots, X_{k-1} < a, X_k \geq a] \in \sigma(X_1, \ldots, X_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Potom

$$a\mathbb{P}(M_n \geq a) = a\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = a\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(F_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{F_k} X_k \, d\mathbb{P} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{F_k} X_n \, d\mathbb{P} = \int_{[M_n \geq a]} X_n \, d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}X_n.$$

□

Věta 3.14. *(prvá a druhá Doobova nerovnost) Buď $X_1, X_2, \ldots$ martingal nebo nezáporný submartingal. Pak pro $n \in \mathbb{N}$ je*

1.
$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\dots,n}|X_k| \geq a\right) \leq a^{-p}\mathbb{E}|X_n|^p, \quad \textit{pro } p \geq 1 \textit{ a } a > 0,$$

2.
$$\mathbb{E}\left(\max_{k=1,\dots,n}|X_k|\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_n|^p, \quad \textit{pro } p > 1.$$

Důkaz. Volme pevně $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $X_n \in L_p$, jinak je totiž pravá strana nekonečná a nerovnosti platí triviálně. Je-li $X_1, X_2, \dots$ martingal nebo nezáporný submartingal, pak v obou případech je $|X_1|^p, |X_2|^p, \dots$ nezáporný submartingal podle tvrzení 2.19. Použitím lemmatu 3.13 pro tento submartingal dostáváme první nerovnost.

Položíme $Y = \max_{k=1,\dots,n}|X_k|$ a fixujeme $p > 1$. Pak

$$\mathbb{E}Y^p \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^p \leq n\mathbb{E}|X_n|^p < \infty.$$

Ze vzorce pro výpočet střední hodnoty nezáporné náhodné veličiny integrováním doplňkové distribuční funkce dostáváme

$$\mathbb{E}Y^p = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y^p > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y^p > a^p)pa^{p-1}\,\mathrm{d}a.$$

Použijeme-li lemma 3.13 pro $|X_1|, |X_2|, \dots$ a Fubiniho větu, získáme odhad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y^p &\leq \int_0^\infty pa^{p-1}a^{-1}\int_{[Y\geq a]}|X_n|\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}a \;= \mathbb{E}\int_0^\infty pa^{p-2}|X_n|\mathbf{1}_{[Y\geq a]}\,\mathrm{d}a\\ &= p\mathbb{E}|X_n|\frac{Y^{p-1}}{p-1} = \frac{p}{p-1}\mathbb{E}|X_n|Y^{p-1}.\end{aligned}$$

Kdyby $\mathbb{E}|X_n|^p = 0$, pak $X_n = 0$ s.j. a také $X_k = 0$ s.j. pro každé $k = 1, \dots, n$. Tudíž i $Y = 0$ s.j. a dokazovaná nerovnost platí triviálně. Z Hölderovy nerovnosti je

$$\mathbb{E}|X_n|Y^{p-1} \leq \left(\mathbb{E}|X_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}Y^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Dohromady tak máme

$$\left(\mathbb{E}Y^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}|X_n|^p\right)^{1/p},$$

což je ekvivalentní zápis požadované nerovnosti. □

Doobova nerovnost implikuje klasické nerovnosti pro nezávislé náhodné veličiny.

Věta 3.15. *(Kolmogorovova nerovnost) Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé centrované náhodné veličiny s konečnými druhými momenty a $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pak*

$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\dots,n}|S_k| \geq a\right) \leq a^{-2}\mathbb{E}S_n^2 = a^{-2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^2, \quad a > 0.$$

Důkaz. Protože S_n je martingal, stačí aplikovat prvou Doobovu nerovnost pro $p = 2$. □

4 Konvergence submartingalů

Definice 4.1. Mějme reálná čísla $a < b$ a konečnou posloupnost $y^{(n)} = (y_1, \dots, y_n)$ reálných čísel. Označíme *počet přeskoků intervalu* (a, b) *směrem nahoru*

$$y^{(n)}\!\uparrow_a^b = \operatorname{card}\{(s,t) : 1 \leq s < t \leq n, \{y_{s+1}, \dots, y_{t-1}\} \subseteq (a,b) \subseteq [y_s, y_t]\}$$

a analogicky *počet přeskoků intervalu* (a, b) *směrem dolů*

$$y^{(n)}\!\downarrow_a^b = \operatorname{card}\{(s,t) : 1 \leq s < t \leq n, \{y_{s+1}, \dots, y_{t-1}\} \subseteq (a,b) \subseteq [y_t, y_s]\},$$

přičemž pokládáme $[c,d] = \emptyset$ pro $c > d$.

Pro nekonečnou posloupnost $y = (y_1, y_2, \dots)$ je

$$y{\uparrow}_a^b = \lim_{n\to\infty} y^{(n)}{\uparrow}_a^b \quad \text{a} \quad y{\downarrow}_a^b = \lim_{n\to\infty} y^{(n)}{\downarrow}_a^b .$$

Poznámka: Zřejmě platí $y{\uparrow}_a^b = (-y){\downarrow}_{-b}^{-a}$ a $y{\downarrow}_a^b -1 \le y{\uparrow}_a^b \le y{\downarrow}_a^b +1$. Když $X = (X_1, X_2, \dots)$ je náhodná posloupnost, pak $X{\uparrow}_a^b$ je zobecněná náhodná veličina.

Tvrzení 4.1. *Buď $X = (X_1, X_2, \dots)$ náhodná posloupnost.*

(i) Existuje zobecněná reálná náhodná veličina X^* taková, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X^*$ právě tehdy, když $\mathbb{P}(X{\uparrow}_a^b < \infty) = 1$ pro každé $a, b \in \mathbb{R} : a < b$.

(ii) Existuje reálná náhodná veličina Y taková, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} Y$ právě tehdy, když $\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| < \infty) = 1$ a $\mathbb{P}(X{\uparrow}_a^b < \infty) = 1$ pro každé $a, b \in \mathbb{R} : a < b$.

Důkaz. Obě implikace zleva doprava jsou zřejmé.

Předpokládejme, že $\mathbb{P}(X{\uparrow}_a^b < \infty) = 1$, a uvažujme zobecněné reálné náhodné veličiny

$$X^* = \limsup_{n\to\infty} X_n \quad \text{a} \quad X_* = \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Potom

$$\mathbb{P}(X_* < X^*) \le \sum_{a,b\in\mathbb{Q}:a\ <b} \mathbb{P}(X_* < a < b < X^*) \le \sum_{a,b\in\mathbb{Q}:a\ <b} \mathbb{P}(X{\uparrow}_a^b = \infty) = 0,$$

a proto $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X^*$.

Pokud navíc předpokládáme, že $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| < \infty$ s.j., pak $|X^*| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| < \infty$ s.j. a můžeme vzít $Y = X^* \mathbf{1}_{[|X^*|<\infty]}$. □

Věta 4.2. *(Doobova nerovnost pro počet přeskoků) Nechť (X_n) je $\mathcal{F}_n$-submartingal. Označme $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a < b$, platí*

$$\mathbb{E}X^{(n)}{\uparrow}_a^b \le \frac{\mathbb{E}(X_n - a)^+ - \mathbb{E}(X_1 - a)^+}{b - a} \le \frac{\mathbb{E}(X_n - a)^+}{b - a}.$$

Důkaz. Uvažujme posloupnost $Z_n = (X_n - a)^+$. Podle tvrzení 2.19 to je $\mathcal{F}_n$-submartingal. Definujme $\mathcal{F}_n$-markovské časy $\tau_0 = 1$, $\nu_j = \min\{k \ge \tau_{j-1} : Z_k = 0\} \wedge n$, $\tau_j = \min\{k \ge \nu_j : Z_k \ge b - a\} \wedge n$. Podle definice je $\tau_0 \le \nu_1 \le \tau_1 \le \nu_2 \le \cdots$. Přitom pokud $\nu_j < n$, pak $\nu_j < \tau_j$. Podobně pokud $\tau_j < n$, potom $\tau_j < \nu_{j+1}$. Musí tedy existovat $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\tau_m = \nu_m = n$. Můžeme proto psát

$$Z_n - Z_1 = \sum_{j=1}^{m} (Z_{\nu_j} - Z_{\tau_{j-1}}) + \sum_{j=1}^{m} (Z_{\tau_j} - Z_{\nu_j}) \ge \sum_{j=1}^{m} (Z_{\nu_j} - Z_{\tau_{j-1}}) + (b - a) Z^{(n)}{\uparrow}_0^{b-a},$$

kde $Z^{(n)} = (Z_1, \dots, Z_n)$. Podle věty 3.1 pro omezené časy $\tau_{j-1} \le \nu_j$ je $\mathbb{E}Z_{\nu_j} \ge \mathbb{E}Z_{\tau_{j-1}}$ pro libovolné j, a tak aplikováním střední hodnoty dostáváme nerovnost

$$\mathbb{E}(Z_n - Z_1) \ge (b - a)\mathbb{E}Z^{(n)}{\uparrow}_0^{b-a} .$$

Využijeme-li ještě definici posloupnosti (Z_n) máme

$$\mathbb{E}(X_n - a)^+ - \mathbb{E}(X_1 - a)^+ \ge (b - a)\mathbb{E}X^{(n)}{\uparrow}_a^b,$$

neboť $Z^{(n)}{\uparrow}_0^{b-a} = X^{(n)}{\uparrow}_a^b$. □

Poznámka: Pro $\mathcal{F}_n$-supermartingal (X_n) platí

$$\mathbb{E}X^{(n)}{\downarrow}_a^b \le \frac{\mathbb{E}(b - X_n)^+ - \mathbb{E}(b - X_1)^+}{b - a} \le \frac{\mathbb{E}(b - X_n)^+}{b - a},$$

jak plyne ze vztahu $y^{(n)}{\uparrow}_a^b = (-y)^{(n)}{\downarrow}_{-b}^{-a}$.

Věta 4.3. *(Doobova věta o konvergenci submartingalu) Nechť (X_n) je $\mathcal{F}_n$-submartingal, který splňuje $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$. Pak existuje náhodná veličina $X_\infty \in L_1$ taková, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_\infty$ a platí*

$$\mathbb{E}X_\infty^+ \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^+ \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$$
$$\mathbb{E}X_\infty^- \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^- \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_1 < \infty.$$

Důkaz. Pro $a < b$ je $X\!\uparrow_a^b$ limitou neklesající nezáporné posloupnosti $X^{(n)}\!\uparrow_a^b$, kde $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$, proto použitím Léviho věty o monotónní konvergenci a věty 4.2 dostaneme

$$\mathbb{E}X\!\uparrow_a^b = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X^{(n)}\!\uparrow_a^b \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n - a)^+}{b-a}$$
$$\le \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n^+ + a^-}{b-a} \le \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ + a^-}{b-a} < \infty.$$

Podle tvrzení 4.1 existuje zobecněná náhodná veličina X_∞ taková, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_\infty$. Kladná i záporná část jsou spojité funkce, a proto také platí $X_n^+ \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_\infty^+$ a $X_n^- \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_\infty^-$. Z Fatouova lemmatu pak máme

$$\mathbb{E}X_\infty^+ = \mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} X_n^+ \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^+ \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$$
$$\mathbb{E}X_\infty^- = \mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} X_n^- \le \liminf_{n\to\infty} (\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_1 < \infty.$$

Využili jsme toho, že ze submartingalové vlastnosti plyne $\mathbb{E}X_n \ge \mathbb{E}X_1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dohromady $\mathbb{E}|X_\infty| = \mathbb{E}X_\infty^+ + \mathbb{E}X_\infty^- < \infty$. □

Poznámka: Podobně platí, že $\mathcal{F}_n$-supermartingal splňující $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^- < \infty$ a $\mathcal{F}_n$-martingal splňující $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ mají integrovatelnou s.j.-limitu. Verzi pro supermartingal obdržíme přechodem k posloupnosti $-X_n$ a verzi pro martingal zkombinováním vět pro supermartingal a submartingal. Jako speciální případy dostáváme následující tvrzení.

1. Shora omezený submartingal má integrovatelnou s.j.-limitu.
2. Zdola omezený supermartingal (spec. nezáporný supermartingal) má integrovatelnou s.j.-limitu.
3. Zdola nebo shora omezený martingal má integrovatelnou s.j.-limitu.

Důsledek 4.4. *Nechť (X_n) je posloupnost nezávislých náhodných veličin taková, že $\mathbb{E}X_n = 0$ a*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n X_k \right| < \infty.$$

Potom $\sum_{k=1}^\infty X_k$ je sčitatelná s.j. a $\sum_{k=1}^\infty X_k \in L_1$.

Důkaz. Definujme $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$. Víme, že (S_n) je martingal a předpokládáme, že $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|S_n| < \infty$, takže stačí použít větu 4.3. □

Poznámka: Připomeňme, že na TP1 bylo dokázáno, že $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{var} X_n < \infty$ je postačující podmínka pro sčitatelnost $\sum_{n=1}^\infty (X_n - \mathbb{E}X_n)$ s.j., v pravděpodobnosti i v L_2. V tomto případě máme zlepšení této věty pro sčitatelnost s.j. Z podmínky $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{var} X_n < \infty$ plyne $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|S_n| < \infty$, protože

$$\mathbb{E}|S_n| \le \sqrt{\mathbb{E}S_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \operatorname{var} X_k} \le \sqrt{\sum_{k=1}^\infty \operatorname{var} X_k}.$$

Definice 4.2. Nechť $(\dots, X_{-2}, X_{-1})$ je náhodná posloupnost indexovaná zápornými celými čísly a $\dots \subseteq \mathcal{F}_{-2} \subseteq \mathcal{F}_{-1}$ je neklesající posloupnost σ-algeber (filtrace). Předpokládejme, že $X_{-n} \in L_1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\sigma(\dots, X_{-n-1}, X_{-n}) \subseteq \mathcal{F}_{-n}$. Řekneme, že posloupnost (X_{-n}) je $\mathcal{F}_{-n}$-*martingal*, jestliže

$$\mathbb{E}[X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-(n+1)}] = X_{-(n+1)} \quad \text{s.j. pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $\mathcal{F}_{-n} = \sigma(\dots, X_{-n-1}, X_{-n})$, mluvíme prostě o *martingalu*, případně když chceme zdůraznit záporný čas, tak o *zpětném martingalu*. Analogicky definujeme $\mathcal{F}_{-n}$-*submartingal* a $\mathcal{F}_{-n}$-*supermartingal*. Budeme značit $\mathcal{F}_{-\infty} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-n}$.

Věta 4.5. *(o konvergenci stejnoměrně integrovatelného (sub)martingalu)*

a) Buď (X_n) stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-submartingal (resp. $\mathcal{F}_n$-martingal), pak existuje náhodná veličina $X_\infty \in L_1$ taková, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_\infty$ a $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X_\infty$. Navíc platí $\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n$ (resp. $\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n] = X_n$) s.j. pro každé $n \in \mathbb{N}$.

b) Buď (X_n) stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_{-n}$-submartingal (resp. $\mathcal{F}_{-n}$-martingal), potom existuje náhodná veličina $X_{-\infty} \in L_1$ taková, že $X_{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_{-\infty}$ a $X_{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X_{-\infty}$. Navíc platí $\mathbb{E}[X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-\infty}] \geq X_{-\infty}$ (resp. $\mathbb{E}[X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-\infty}] = X_{-\infty}$) s.j. pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. a) Z předpokladu stejnoměrné integrovatelnosti máme stejně omezené momenty a tím i splněn předpoklad pro použití Doobovy věty o konvergenci submartingalu (věta 4.3): $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Tudíž existuje náhodná veličina $X_\infty \in L_1$ taková, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_\infty$. Konvergenci v L_1 dostaneme z předpokladu stejnoměrné integrovatelnosti. Pro pevná přirozená čísla $n \leq m$ je $X_n \leq \mathbb{E}[X_m \mid \mathcal{F}_n]$ s.j. Ze spojitosti podmíněné střední hodnoty v L_1 (tvrzení 2.16a) jde pravá strana k $\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ pro $m \to \infty$. Konvergence v L_1 implikuje konvergenci v pravděpodobnosti, která implikuje existenci vybrané podposloupnosti konvergentní s.j. Pro tuto vybranou podposloupnost m_k je splněna nerovnost $X_n \leq \mathbb{E}[X_{m_k} \mid \mathcal{F}_n]$ s.j., která se tak zachovává přechodem k limitě. Musí tedy platit $X_n \leq \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ s.j.

b) Analogie věty 4.3 pro $\mathcal{F}_{-n}$-submartingal a stejnoměrná integrovatelnost zaručují existenci náhodné veličiny $X_{-\infty} \in L_1$ takové, že $X_{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_{-\infty}$ a $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} X_{-\infty}$. Potom ze spojitosti podmíněné střední hodnoty v L_1 (tvrzení 2.16a) je $\mathbb{E}[X_{-m} \mid \mathcal{F}_{-\infty}] \xrightarrow[m\to\infty]{L_1} \mathbb{E}[X_{-\infty} \mid \mathcal{F}_{-\infty}] = X_{-\infty}$. Ze vztahu $X_{-m} \leq \mathbb{E}[X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-m}]$ s.j. pro $m \geq n$ získáme podmíněním σ-algebrou $\mathcal{F}_{-\infty}$ vztah $\mathbb{E}[X_{-m} \mid \mathcal{F}_{-\infty}] \leq \mathbb{E}[X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$ s.j. Levá strana jde pro $m \to \infty$ v L_1 k $X_{-\infty}$ a nerovnost se přechodem k limitě zachová.

□

Důsledek 4.6. *Je-li (X_n) je $\mathcal{F}_n$-adaptovaná posloupnost, potom je (X_n) stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-martingal právě tehdy, když existuje $X_\infty \in L_1$ tak, že $X_n = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ s.j.*

Důkaz. Implikace zleva doprava plyne z věty 4.5. Naopak posloupnost daná předpisem $X_n = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ je $\mathcal{F}_n$-martingal (viz cvičení) a stejnoměrná integrovatelnost plyne z tvrzení 2.16c). □

Nyní si uvědomme spojitost podmíněné střední hodnoty v podmínce.

Tvrzení 4.7. *Buď $Y \in L_1$ a $\dots \subseteq \mathcal{F}_{-2} \subseteq \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ neklesající posloupnosti σ-algeber. Potom*

a) $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_\infty]$ s.j. i v L_1,

b) $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{-n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$ s.j. i v L_1.

Důkaz. a) Víme, že $Y_n = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$ je stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_n$-martingal (důsledek 4.6). Podle věty 4.5 existuje $Y_\infty \in L_1$ tak, že $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_\infty$ s.j. i v L_1 a $Y_n = \mathbb{E}[Y_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ s.j. Ukážeme, že $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_\infty] = Y_\infty$ s.j. Pro $F \in \mathcal{F}_n$ je

$$\int_F Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F Y_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F Y_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n] \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

První rovnost plyne z toho, že $Y_n = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$; druhá z toho, že $Y_n = \mathbb{E}[Y_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ s.j. a třetí z toho, že $Y_\infty = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$ s.j. Máme ověřený vztah

$$\int_F Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n] \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

pro libovolné $F \in \cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$, kde $\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ je algebra, která generuje $\mathcal{F}_\infty$. Navíc $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$ je $\mathcal{F}_\infty$-měřitelná, a tak $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_\infty] = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$ s.j.

b) Náhodná posloupnost $Y_{-n} = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{-n}]$ je stejnoměrně integrovatelný martingal (cvičení). Podle věty 4.5 existuje náhodná veličina $Y_{-\infty} \in L_1$ tak, že $Y_{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y_{-\infty}$ s.j. i v L_1 a $Y_{-\infty} = \mathbb{E}[Y_{-n} \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$ s.j. Pak pro libovolné $F \in \mathcal{F}_{-\infty}$ je

$$\int_F Y_{-\infty} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F Y_{-n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F Y \,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

a tedy $Y_{-\infty} = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$ s.j.

□

Věta 4.8. *(o explozi submartingalu) Nechť (X_n) je submartingal. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $Y_k = X_{k+1} - X_k$. Pokud $(\sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n)^+ \in L_1$, potom existuje reálná náhodná veličina X_∞ taková, že $X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty(\omega)$ pro s.v. $\omega \in \Omega$ s vlastností $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) < \infty$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme markovský čas $\tau_k = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \ge k\}$. Fixujme pevně $k \in \mathbb{N}$. Pak podle věty o zastavení (důsledek 3.2) je $X_{n\wedge\tau_k}$ submartingal. Rozlišíme následující tři případy:

1. $\tau_k = 1 \Rightarrow X_{n\wedge\tau_k} = X_1$,
2. $1 < \tau_k \le n \Rightarrow X_{n\wedge\tau_k} = X_{\tau_k} = X_{\tau_k - 1} + Y_{\tau_k - 1} \le k + \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$,
3. $\tau_k > n \Rightarrow X_{n\wedge\tau_k} = X_n < k$.

Dohromady tak máme

$$X_{n\wedge\tau_k}^+ \le X_1^+ + k \;+ \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right)^+ \in L_1,$$

a tudíž $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_{n\wedge\tau_k}^+ < \infty$. Podle Doobovy věty o konvergenci submartingalu (věta 4.3) existuje náhodná veličina $X^{(k)} \in L_1$ taková, že $X_{n\wedge\tau_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X^{(k)}$. Pak pro $A_k = [\tau_k = \infty] = [\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n < k]$ platí

$$X_n \mathbf{1}_{A_k} = X_{n\wedge\tau_k} \mathbf{1}_{A_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X^{(k)} \mathbf{1}_{A_k}.$$

Jevy A_k tvoří neklesající posloupnost a jejich limitou pro $k \to \infty$ je $A = [\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n < \infty]$. Dále je $X^{(k)} \mathbf{1}_{A_k} \overset{s.j.}{=} X^{(l)} \mathbf{1}_{A_k}$ pro $l \ge k$. Položíme-li $X_\infty = X^{(1)} \mathbf{1}_{A_1} + X^{(2)} \mathbf{1}_{A_2 \setminus A_1} + \cdots$, pak $X_n \mathbf{1}_A \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.j.}} X_\infty$. □

5 Limitní věty pro martingalové diference

Definice 5.1. Nechť (M_n) je martingal. Položme $M_0 = \mathbb{E}M_1$ a definujme $D_n = M_n - M_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak (D_n) nazýváme posloupností *martingalových diferencí* martingalu (M_n). Je-li (M_n) $\mathcal{F}_n$-martingal, mluvíme o *$\mathcal{F}_n$-martingalových diferencích.*

Poznámka: Ekvivalentně bychom mohli $\mathcal{F}_n$-martingalové diference definovat jako posloupnost splňující $\mathbb{E}(D_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, přičemž pokládáme $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Věta 5.1. *(sčitatelnost martingalových diferencí) Nechť (D_n) jsou martingalové diference martingalu $M_n \in L_2$. Pokud $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{var} D_n < \infty$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty D_n$ je sčitatelná s.j. i v L_2, tj. martingal $M_n - \mathbb{E}M_1$ konverguje s.j. i v L_2.*

Důkaz. Podle tvrzení 2.21 jsou D_n nekorelované. Připomeňme, že z TP1 víme, že pro centrované nekorelované náhodné veličiny je sčitatelnost v L_2 ekvivalentní s konečností součtu jejich rozptylu. Pro sčitatelnost s.j. ověříme předpoklad věty 4.3:

$$\mathbb{E}|M_n - \mathbb{E}M_1| \leq \sqrt{\mathbb{E}(M_n - \mathbb{E}M_1)^2} = \sqrt{\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}D_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{var} D_k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{var} D_k} < \infty,$$

a tak $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|M_n - \mathbb{E}M_1| < \infty$. □

Věta 5.2. *(silný zákon velkých čísel pro martingalové diference) Nechť (D_n) jsou martingalové diference martingalu $M_n \in L_2$ a $0 < b_n \nearrow \infty$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2} \operatorname{var} D_n < \infty$, potom*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{M_n - \mathbb{E}M_1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{s.j. i v } L_2.$$

Důkaz. Posloupnost $\left(\frac{D_n}{b_n}\right)$ rovněž tvoří martingalové diference a splňuje předpoklad věty 5.1. Tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1} D_n$ je sčitatelná s.j. Abychom ukázali konvergenci s.j., stačí nyní využít Kroneckerovo lemma, které říká, že je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ a $0 < b_n \nearrow \infty$, pak $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. I pro konvergenci v L_2 použijeme Kroneckerova lemma, ze kterého plyne

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{var} D_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

a tak

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} D_k\right)^2 = \frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}D_k^2 = \frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{var} D_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Věta 5.3. *(centrální limitní věta pro martingalové diference) Nechť (D_n) jsou martingalové diference $\mathcal{F}_n$-martingalu (M_n). Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\mathbb{E}(D_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 1$ a $\mathbb{E}(|D_n|^3 \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leq K < \infty$, přičemž pokládáme $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Potom*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{1}{\sqrt{n}}(M_n - \mathbb{E}M_1) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} N(0,1).$$

Důkaz. Definujme

$$\varphi_{n,k}(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{D_k}{\sqrt{n}}\right\} \Big| \mathcal{F}_{k-1}\right), \quad k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Z Taylorova rozvoje máme

$$\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{D_k}{\sqrt{n}}\right\} = 1 + \mathrm{i}t\frac{D_k}{\sqrt{n}} - \frac{t^2 D_k^2}{2n} - \mathrm{i}t^3\frac{\Delta_k^3}{6n^{3/2}},$$

kde Δ_k je náhodná veličina splňující $0 \leq \Delta_k \leq D_k$. Aplikování podmíněné střední hodnoty na obě strany nám dá

$$\varphi_{n,k}(t) = 1 + \frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{n}}\mathbb{E}(D_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) - \frac{\mathrm{i}t^3}{6n^{3/2}}\mathbb{E}(\Delta_k^3 \mid \mathcal{F}_{k-1}),$$

což vzhledem k našim předpokladům můžeme zjednodušit na

$$\varphi_{n,k}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{\mathrm{i}t^3}{6n^{3/2}}\mathbb{E}(\Delta_k^3 \mid \mathcal{F}_{k-1}).$$

Pro $p = 1, \dots, n$ máme

$$\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_p}{\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{D_p}{\sqrt{n}}\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\mathbb{E}\left(\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{D_p}{\sqrt{n}}\right\}\Big|\mathcal{F}_{p-1}\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\varphi_{n,p}(t)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\left(1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{\mathrm{i}t^3}{6n^{3/2}}\mathbb{E}(\Delta_p^3 \mid \mathcal{F}_{p-1})\right)\right],$$

a proto

$$\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_p}{\sqrt{n}}\right\} - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\} = -\frac{\mathrm{i}t^3}{6n^{3/2}}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\mathbb{E}(\Delta_p^3 \mid \mathcal{F}_{p-1})\right].$$

Použijeme-li nyní předpoklad omezenosti podmíněných absolutních třetích momentů a faktu $|\Delta_p| \le |D_p|$, dostaneme

$$\left|\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_p}{\sqrt{n}}\right\} - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\right| \le K\,\frac{|t|^3}{6n^{3/2}}. \tag{12}$$

Zvolme pevně $t \in \mathbb{R}$. Pro dostatečně velké n (a sice $n \ge t^2/2$) je $0 \le 1 - \frac{t^2}{2n} \le 1$, a tak levou stranu (12) vynásobením $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-p}$ určitě nezvětšíme. Obdržíme tím

$$\left|\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-p}\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_p}{\sqrt{n}}\right\} - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-p+1}\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\right| \le K\,\frac{|t|^3}{6n^{3/2}}.$$

Aplikujeme-li nyní na identitu

$$\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_n - \mathbb{E}M_1}{\sqrt{n}}\right\} - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n$$
$$= \exp\left\{-\mathrm{i}t\frac{\mathbb{E}M_1}{\sqrt{n}}\right\}\sum_{p=1}^{n}\left[\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-p}\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_p}{\sqrt{n}}\right\} - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-p+1}\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_{p-1}}{\sqrt{n}}\right\}\right]$$

trojúhelníkovou nerovnost, dostaneme (pro $n \ge t^2/2$)

$$\left|\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_n - \mathbb{E}M_1}{\sqrt{n}}\right\} - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \le nK\frac{|t|^3}{6n^{3/2}} = K\,\frac{|t|^3}{6\sqrt{n}}.$$

Protože pravá strana jde k nule a $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n$ jde k $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ pro $n \to \infty$, máme

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{M_n - \mathbb{E}M_1}{\sqrt{n}}\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}.$$

Ukázali jsme konvergenci příslušných charakteristických funkcí k charakteristické funkci normovaného normálního rozdělení, čímž je dokázána požadovaná konvergence k distribuci. □

Na závěr ještě bez důkazu uveďme zobecnění Fellerovy-Lindebergovy centrální limitní věty pro trojúhelníkové schéma martingalových diferencí.

Věta 5.4. *(Brownova centrální limitní věta pro martingalové diference) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dáno $k_n \in \mathbb{N}$, σ-algebry $\mathcal{F}_{0,n} = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_{1,n} \subseteq \mathcal{F}_{2,n} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_{k_n,n}$ a $(\mathcal{F}_{k,n}, k = 1, \dots, k_n)$-martingalové diference $D_{1,n}, \dots, D_{k_n,n}$ Předpokládejme, že*

(i) je splněna podmíněná Fellerova-Lindebergova podmínka

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}\left(D_{k,n}^2\mathbf{1}_{[|D_{k,n}|\ge\varepsilon]} \mid \mathcal{F}_{k-1,n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{pro každé } \varepsilon > 0,$$

(ii) $\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}(D_{k,n}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$

Potom

$$\sum_{k=1}^{k_n} D_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} N(0,1).$$

Uvědomme si, že věta 5.3 je speciálním případem věty 5.4. Stačí uvažovat $D_{k,n} = \frac{D_k}{\sqrt{n}}$, $k = 1, \ldots, k_n = n$. Podmíněná Fellerova-Lindebergova podmínka plyne z předpokladu na omezenost podmíněných třetích momentů.