Zápočtová písemka NMSA334 – 15. 5. 2013

1. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. (1 bod)
b) Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Pokud ano, tak ho určete. (1 bod)
c) Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit $\boldsymbol{Q}$. Pokud ano, tak ho určete. (1 bod)

2. V jisté firmě je N počítačů, o které se stará r správců. U každého počítače může dojít k problému, přičemž výskyt problému nezávisí na předchozím stavu počítače ani na stavu ostatních počítačů. V případě výskytu problému je okamžitě povolán jeden správce na jeho řešení. Pokud jsou všichni správci zaměstnáni, počítač nepracuje a čeká na vyřešení problému. Předpokládá se, že na jednom počítači pracuje jen jeden správce a správci pracují nezávisle. Dále předpokládejme, že u každého počítače jsou doby mezi problémy nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\lambda > 0$ a doby řešení problému správci jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\mu > 0$. Nechť X_t je počet počítačů, které v čase t nepracují.
a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. (2 body)
b) Najděte stacionární rozdělení řetězce (pokud existuje). (3 body)

3. Předpokládejme, že příchody tiskových úloh odesílaných na tiskárnu tvoří Poissonův proces s intenzitou λ. Úlohy se řadí do tiskové fronty a jsou zpracovávány jedna po druhé podle pořadí příchodu. Doby zpracování mají exponenciální rozdělení s intenzitou μ, jsou vzájemně nezávislé a nezávislé na procesu příchodů úloh. Nechť X_t značí počet úloh v systému (čekajících i zpracovávaných dohromady) v čase t.
a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. (2 body)
b) Zjistěte, kdy existuje stacionární rozdělení a určete ho. (2 body)
c) Spočtěte střední počet úloh čekajících ve frontě v ustáleném provozu.
Pomůcka: $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ pro $|q| < 1$. (2 body)