Zápočtová písemka NSTP198 – 12. 1. 2011

1. V holičství pracují 3 holiči. Každý z nich obsluhuje jednoho zákazníka průměrně 10 minut. Do holičství přichází v průměru 12 zákazníků za hodinu. V případě, že žádný z holičů není volný, zákazníci čekají v jediné frontě, přičemž zákazník, který by se musel do fronty zařadit jako čtvrtý, odchází neobsloužen. Předpokládáme, že doby mezi příchody zákazníků i doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Označme X_t počet zákazníků v holičství (ve frontě i v obsluze) v čase t.

a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. (2 body)

b) Najděte stacionární rozdělení počtu zákazníků v holičství (pokud existuje). (3 body)

c) Určete střední počet zákazníků ve frontě (při stacionárním rozdělení). (1 bod)

2. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & -6 & 3 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 0 & -8 & 4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

a) Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. (1 bod)

b) Rozhodněte, zda všechny stavy vnořeného řetězce jsou trvalé. (1 bod)

c) Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Pokud ano, tak ho určete. (3 body)

d) Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit Q. Pokud ano, tak ho určete.
Pomůcka: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k+1}}{k+1} = -\log(1-q)$ pro $|q| < 1$. (3 body)