Úlohy ke cvičení NSTP005 – bodové procesy

1. Dokažte větu 1 z přednášky: Φ je bodový proces právě tehdy, když $\Phi(B)$ je náhodná veličina pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$.

2. Nechť $\{B_n, B_n \in \mathcal{B}_0^d\}$ je neklesající posloupnost ($B_n \subseteq B_{n+1}$) taková, že $\cup_n B_n = \mathbb{R}^d$. Uvažujme posloupnost binomických bodových procesů $\Phi^{(n)}$ s mírou ν na B_n a předpokládejme, že existuje $0 < \lambda < \infty$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\nu(B_n)} = \lambda.$$

Ukažte, že pro libovolnou $A \in \mathcal{B}^d$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Phi^{(n)}(A) = k) = \mathrm{e}^{-\lambda\nu(A)} \frac{(\lambda\nu(A))^k}{k!}.$$

3. Za stejných předpokladů jako v minulé úloze ukažte, že pro pro $A, B \in \mathcal{B}^d$, $A \cap B = \emptyset$ a $k, l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Phi^{(n)}(A) = k, \Phi^{(n)}(B) = l) = \mathrm{e}^{-\lambda\nu(A)} \frac{(\lambda\nu(A))^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda\nu(B)} \frac{(\lambda\nu(B))^l}{l!}.$$

4. Mějme lokálně konečnou difúzní míru Λ. Uvažujme systém $\{B_i, B_i \in \mathcal{B}_0^d\}$ spočetně mnoha po dvou disjunktních množin a bodový proces Φ zkonstruovaný následujícím způsobem (nezávisle na sobě):
- $N_i \sim \mathrm{Po}(\Lambda(B_i))$,
- za podmínky $N_i = n$, nechť $\Phi_i = \{X_1, \dots, X_n\}$ je binomický proces na B_i s mírou Λ,
- $\Phi = \cup_i \Phi_i$.

Ukažte, že Φ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ.

5. Ukažte, že homogenní Poissonův bodový proces je stacionární a izotropní.

6. Nechť Φ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity Λ. Uvažujme pevnou množinu $B \in \mathcal{B}^d$ a položme $\Phi_B = \Phi \cap B$. Ukažte, že Φ_B je Poissonův bodový proces a určete jeho míru intenzity.

7. Mějme dva nezávislé Poissonovy bodové procesy Φ_1 a Φ_2 s mírami intenzit Λ_1 a Λ_2. Ukažte, že $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ je Poissonův bodový proces a určete jeho míru intenzity.

8. Ověřte, že platí následující vztahy:
a) $\operatorname{var} \Phi(B) = M^{(2)}(B \times B) - \Lambda(B)^2$,
b) $\operatorname{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = M^{(2)}(B_1 \times B_2) - \Lambda(B_1)\Lambda(B_2)$,
c) $M^{(2)}(B_1 \times B_2) = \Lambda(B_1 \cap B_2) + \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2)$,
d) $M^{(3)}(B_1 \times B_2 \times B_3) = \Lambda(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \alpha^{(2)}((B_1 \cap B_2) \times B_3) + \alpha^{(2)}((B_1 \cap B_3) \times B_2) + \alpha^{(2)}((B_2 \cap B_3) \times B_1) + \alpha^{(3)}(B_1 \times B_2 \times B_3)$,
e) $\alpha^{(n)}(B \times \cdots \times B) = \mathbb{E}[\Phi(B)(\Phi(B) - 1) \cdots (\Phi(B) - n + 1)]$.

9. Nechť Φ je Poissonův bodový proces. Ukažte, že platí:
a) $\operatorname{cov}(\Phi(B_1), \Phi(B_2)) = \Lambda(B_1 \cap B_2)$,
b) $\alpha^{(n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \prod_{i=1}^n \Lambda(B_i)$,
c) $\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(x_i)$.

10. Pomocí Campbellovy-Meckeho věty pro stacionární bodové procesy ukažte, že platí:

$$P_y(U) = \frac{1}{\lambda|B|} \mathbb{E} \sum_{X \in \Phi \cap B} \mathbf{1}_{[\Phi + y - X \in U]}, \quad y \in \mathbb{R}^d,\ U \in \mathfrak{N},$$

kde $B \in \mathcal{B}_0^d$ je libovolná s kladnou Lebesgueovou mírou ($|B| > 0$).

11. Pomocí Campbellovy-Meckeho věty pro stacionární bodové procesy ukažte, že platí:

$$\lambda K(r) = \mathbb{E} \sum_{X \in \Phi \cap B} \frac{\Phi(b(X, r) \setminus \{X\})}{\lambda|B|}, \quad r > 0,$$

kde $B \in \mathcal{B}_0^d$ je libovolná s kladnou Lebesgueovou mírou ($|B| > 0$).

Úlohy ke cvičení NSTP005 – modely bodových procesů

1. Dokažte, že pro homogenní Poissonův bodový proces platí PI = CE = 1, $G(r) = F(r) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\omega_d r^d}$ a $J(r) = 1$.

2. Disperze náhodné veličiny $\Phi(B)$ je definována jako

$$D(\Phi(B)) = \frac{\operatorname{var}\Phi(B)}{\mathbb{E}\Phi(B)}, \quad B \in \mathcal{B}_0^d.$$

Ukažte, že
a) pro Poissonův proces je $D(\Phi(B)) = 1$,
b) binomický proces je poddisperzní, tj. $D(\Phi(B)) \le 1$,
c) Coxův proces je naddisperzní, tj. $D(\Phi(B)) \ge 1$.

3. Nechť Y je náhodná veličina s gama rozdělením. Ukažte, že příslušný smíšený Poissonův proces Φ (tj. Coxův proces s řídící mírou $Y|\cdot|$) je negativně binomický proces, což znamená, že $\Phi(B)$ má negativně binomické rozdělení pro každé $B \in \mathcal{B}_0^d$.

4. Nechť Y je stacionární gaussovské náhodné pole na $\mathbb{R}^d$, tj. realizace jsou $y : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a pro každé $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ a $k \in \mathbb{N}$ má náhodný vektor $(Y(x_1), \dots, Y(x_k))$ k-rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $(\mu, \dots, \mu)^T$ a kovarianční maticí $(\sigma^2 r(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$. Nechť trajektorie $x \to Y(x)$ jsou spojité s.j. Definujme náhodnou míru $\Lambda(B) = \int_B \mathrm{e}^{Y(x)}\,\mathrm{d}x$, $B \in \mathcal{B}^d$. Stacionární Coxův proces s řídící mírou Λ se nazývá logaritmicko-gaussovský Coxův proces (LGCP).
a) Určete součinovou hustotu a párovou korelační funkci LGCP.
b) Dokažte, že rozdělení LGCP je určenou intenzitou a párovou korelační funkcí.

5. Nechť Φ je Neymanův-Scottové Poissonův proces. Zdůvodněte, že podmíněně při Φ_p jsou dceřinné procesy Ψ_X nezávislé Poissonovy procesy s funkcí intenzity $\lambda_c p(\cdot - X)$.

6. Spočtěte párovou korelační funkci
a) Thomasova procesu,
b) Matérnova shlukového procesu pro $d = 2$.

7. Pro proces s pevným jádrem $r > 0$ a intenzitou λ definujeme *hustotu pokrytí (packing density)* jako $\tau = \lambda|b(o, r/2)|$. Jedná se vlastně o střední objemový podíl sjednocení koulí se středy v bodech procesu a poloměry $r/2$. Nalezněte maximální možné τ pro tyto modely:
a) Matérnův proces s pevným jádrem typ I,
b) Matérnův proces s pevným jádrem typ II.

8. Ukažte, že konečný bodový proces s hustotou $p(\varphi) = \alpha\beta^{\varphi(\mathbb{R}^d)}$ je Poissonův bodový proces s mírou intenzity $\beta\Lambda$ a určete normující konstantu α.

9. Ukažte, že bodový proces s hustotou

$$p(\varphi) = \exp\{|B| - \int_B \lambda(x)\,\mathrm{d}x\} \prod_{x\in\varphi} \lambda(x)$$

vzhledem k rozdělení homogenního Poissonova procesu s jednotkovou intenzitou na $B \in \mathcal{B}_0^d$ je Poissonův bodový proces na B s funkcí intenzity λ.

10. Ukažte, že pro $\gamma > 1$ není hustota Straussova procesu integrovatelná.

Úlohy ke cvičení NSTP005 – geostatistika

1. Nechť $\{W_t^H, t \in \mathbb{R}_+^d\}$ je spojité centrované gaussovské náhodné pole s kovariancemi

$$\mathbb{E}W_t^H W_s^H = \frac{1}{2}(\|t\|^{2H} + \|s\|^{2H} - \|t-s\|^{2H}), \quad t, s \in \mathbb{R}_+^d,$$

kde $H \in (0,1)$. Takto definované náhodné pole se označuje jako *Lévyho frakcionální Brownovo náhodné pole (Lévy's fractional Brownian random field)*. Určete jeho variogram.

2. Určete spektrální hustotu slabě stacionárního náhodného pole s kovarianční funkcí $C(h) = \exp\{-\|h\|^2\}$, $h \in \mathbb{R}^d$.
Návod: Využijte toho, že charakteristická funkce normálního rozdělení $N_d(0, \sigma^2 I)$ je $\exp\{-\sigma^2\|t\|^2/2\}$.

3. Neparametrický odhad variogramu vnitřně stacionárního náhodného pole $\{Z(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ se dá maticově zapsat jako $2\hat{\gamma}(h) = Z^T A(h) Z$, kde $Z = (Z(x_1), \ldots, Z(x_n))^T$. Určete matici $A(h)$ pro data na regulární mříži 3×3, tj. $n = 9$, $d = 2$ a polohy x_i jsou tvaru (k, l), $k, l \in \{1, 2, 3\}$.

4. Mějme sférický model pro kovarianční funkci stacionárního a izotropního náhodného pole:

$$C(\|h\|) = \sigma^2 \frac{|b(o,\varrho) \cap b(h,\varrho)|}{|b(o,\varrho)|}, \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Tento model je platný v dimenzi d a ve všech nižšíchm ne však v dimenzích vyšších. Vyjádřete tuto kovarianční funkci v případě $d = 1$ a ukažte, že kdybychom obdrženou funkci uvažovali v $\mathbb{R}^2$, tak nedostaneme pozitivně semidefinitní funkci.
Návod: Uvažujte body $x_{ij} = (i\sqrt{2}\varrho, j\sqrt{2}\varrho)$, $i, j = 1, \ldots, 8$ a koeficienty $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}$.

5. Nechť náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = x + y, \qquad x, y \in (0, 1).$$

Najděte nejlepší a nejlepší lineární predikci Y při daném X. V obou případech určete chybu predikce.

Úlohy ke cvičení NSTP005 – prostorové modely na mřížích

1. Ukažte, že $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ markovský řetězec je markovské náhodné pole vzhledem k relaci $i \sim j \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$. Dokažte, že obrácená implikace platí následovně: pokud $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ je markovské náhodné pole s hustotou splňující $p(z) > 0$ pro každé $z = (z_1, \ldots, z_n)^T$, potom je to markovský řetězec.

2. Lokální charakteristiky nemusí určovat sdružené rozdělení. Uvažujme mříž se dvěma vrcholy $L = \{i, j\}$ a předpokládejme, že $Z_i \mid Z_j = z_j$ má exponenciální rozdělení s intenzitou z_j a $Z_j \mid Z_i = z_i$ má exponenciální rozdělení s intenzitou z_i. Ukažte, že tato podmíněná rozdělení neodpovídají žádnému pravděpodobnostnímu rozdělení, tedy neexistuje vlastní sdružená hustota vektoru $(Z_i, Z_j)^T$.

3. Nechť $S = \mathbb{N}_0$ a L je konečná mříž v $\mathbb{R}^d$. Ukažte, že pokud $\beta_{ij} \geq 0$ pro každé $i, j \in L$, pak konstanta

$$\sum_{z \in S^L} \exp\left(-\sum_{i \in L} (\log z_i! + \beta_i z_i) - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{C}} \beta_{ij} z_i z_j \right)$$

je konečná. Naopak je nekonečná, pokud $\beta_{ij} < 0$ pro nějaké $i, j \in L$.
Návod: V prvním případě uvažujte konfigurace, pro které je $\max z_i = k$ (je jich $(k+1)^n - k^n$). V druhém případě uvažte konfigurace $z_i = z_j = k$ a $z_l = 0$ pro $l \in L \setminus \{i, j\}$.

4. Nechť náhodná veličina Z_1 má normální rozdělení $N(0, \frac{1}{1-\varphi^2})$, kde $|\varphi| < 1$. Uvažujme autoregresní posloupnost prvního řádu $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ definovanou předpisem

$$Z_t = \varphi Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, \ldots, n,$$

kde $\{\varepsilon_t\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$. Spočtěte kovarianční matici Σ vektoru $(Z_1, \ldots, Z_n)^T$ a určete matici $Q = \Sigma^{-1}$. Ukažte, že $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ je gaussovské markovské náhodné pole vzhledem k relaci $i \sim j \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$.

5. Nechť $\{Z_i, i \in L\}$ je gaussovské markovské náhodné pole s inverzí Q kovarianční matice. Ukažte, že

$$\operatorname{corr}(Z_i, Z_j \mid Z_{-\{i,j\}}) = -\frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii} q_{jj}}}, \quad i \neq j.$$