

Náhodné vektory II.

1. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = X + Y$, jestliže
 - (a) X, Y mají exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\lambda)$,
 - (b) X, Y mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.
(Na rozmyšlení: Jaká je hustota $Z = \sum_{i=1}^n X_i$, kde $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ jsou nezávislé?)
2. Náhodný vektor $(X, Y)'$ v příkladě 2 z minulého cvičení udával útratu za jídlo a pití na rodinné oslavě a měl sdružené rozdělení s hustotou $f(x, y) = x + y$ pro $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak. Označte $W = X - Y$ a $Z = X + Y$.
 - (a) Jaká je střední hodnota a rozptyl náhodných veličin W a Z ?
 - (b) Spočtete korelační koeficient $\text{cor}(W, Z)$.
 - (c) Určete střední hodnotu náhodné veličiny $U = \frac{\sin(\pi X)}{X + Y}$.
 - (d)* Určete hustotu náhodné veličiny Z .
Návod: Spočtete nejdříve distribuční funkci $G(z)$ náhodné veličiny Z jako pravděpodobnost jevu $[X + Y \leq z]$. Vhodný obrázek pomůže.
3. V daný den přijde do školy X dívek a Y chlapců, kde X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda > 0$ a $\mu > 0$.
 - (a) Určete rozdělení a očekávanou hodnotu celkového počtu žáků ve škole v daný den.
 - (b) Jaké je rozdělení počtu dívek, jestliže víme, že je ve škole v daný den celkem n žáků?
4. Nechť $I_1, \dots, I_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s alternativním rozdělením, tj.

$$P(I_i = 1) = p, \quad P(I_i = 0) = 1 - p.$$

Označme $X = \sum_{i=1}^n I_i$. Jaké má náhodná veličina X rozdělení? Pomocí vzorců (A1) a (A2) z „Opakování...“ spočítejte její střední hodnotu a rozptyl.

5. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, které splňují:

$$P(X = k) = (1 - p_1)^k p_1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad P(Y = l) = (1 - p_2)^l p_2, \quad l = 0, 1, \dots$$

Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.

6. Najděte rozdělení hustotu součtu náhodných veličin X a Y , jestliže tyto jsou nezávislé a $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim R(0, \theta)$, Určete střední hodnotu a rozptyl $X + Y$.
7. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0, 1)$. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Z = X + Y$.
8. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$. Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = XY$.
9. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením $\text{Exp}(\lambda)$, Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = \frac{X}{Y}$.

Opakování z přednášky

Rozdělení součtu náhodných veličin. Nechť má náhodný vektor $(X, Y)'$ sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x, y)$. Potom má náhodná veličina $Z = X + Y$ rozdělení s distribuční funkcí

$$G(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Hustotu náhodné veličiny Z pak dostaneme jako $g(z) = G'(z)$.

Speciálně, jsou-li X, Y **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y , pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \, dx.$$

Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny, které nabývají pouze nezáporných celočíselných hodnot, potom pro rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$ platí

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k).$$

Jsou-li X, Y navíc **nezávislé**, pak platí

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k) P(Y = n - k).$$

Další (možná) užitečné informace. Jestliže $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

$$\bullet \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E X_i, \quad (\text{A1})$$

$$\bullet \quad \text{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var}(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) \quad (\text{A2}).$$

Rozdělení součinu a podílu. Nechť X, Y jsou **nezávislé** veličiny s hustotami f_X, f_Y . Pak

(a) veličina $V = XY$ má rozdělení s hustotou

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{v}{x}\right) f_Y(x) \frac{1}{|x|} \, dx,$$

(b) je-li $f_Y(y) = 0$ pro $y < 0$, má veličina $W = \frac{X}{Y}$ rozdělení s hustotou

$$h(w) = \int_0^{\infty} x f_X(wx) f_Y(x) \, dx.$$

Výsledky

- 1.(a) $E Z = 2/\lambda$, $\text{var}(Z) = 2/\lambda^2$, hustota Z : $g(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z > 0$, a $g(z) = 0$ jinak,
 (b) $E Z = 1$, $\text{var}(Z) = 1/6$, hustota Z :

$$g(z) = \begin{cases} z & z \in (0, 1), \\ 2 - z & z \in (1, 2), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- 2.(a) $E W = 0$, $\text{var}(W) = 1/6$, $E Z = 7/6$, $\text{var}(Z) = 5/36$,
 (b) $\text{cor}(W, Z) = 0$,
 (c) $E U = \frac{2}{\pi}$,
 (d) hustota Z :

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & z \in (0, 1), \\ z(2 - z) & z \in (1, 2), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

- 3.(a) $Z = X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda + \mu$, $E Z = \lambda + \mu$,
 (b) rozdělení počtu dívek X za podmínky $Z = n$ je binomické s parametry n a $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.
 4. X má binomické rozdělení. $E X = np$, $\text{var}(X) = np(1 - p)$.

5.

$$P(Z = n) = p_1 p_2 \frac{(1 - p_2)^{n+1} - (1 - p_1)^{n+1}}{p_1 - p_2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

pro $p_1 \neq p_2$ a

$$P(Z = n) = (n + 1) p^2 (1 - p)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

pro $p_1 = p_2 (= p)$.

6. Hustota náhodné veličiny $Z = X + Y$:

$$g(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0, \\ \frac{1}{\theta}(1 - e^{-\lambda z}) & z \in (0, \theta], \\ \frac{e^{-\lambda z}}{\theta}(e^{\lambda \theta} - 1) & z \in (\theta, \infty), \end{cases}$$

$$E Z = \frac{1}{\lambda} + \frac{\theta}{2}, \text{var } Z = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\theta^2}{12}.$$

7. Náhodná veličina Z má normální rozdělení $N(0, 2)$, $E Z = 0$, $\text{var}(Z) = 2$.
 8. Hustota náhodné veličiny Z (např. věta o rozdělení součinu):

$$h(z) = \begin{cases} -\ln(z) & z \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

9. Hustota náhodné veličiny Z (např. věta o rozdělení podílu):

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2} & z > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$