Mnohorozměrné normální rozdělení
2019

Definice: Nechť $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_r)^T$, kde $Z_i \sim \mathsf{N}(0,1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Nechť $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}_{n\times r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ je matice. Pak řekneme, že $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}$ má **n-rozměrné normální rozdělení** $\mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$.

Vlastnosti: Ukažte, že platí:

1. Má-li $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, pak $\mathsf{E}\,\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}$, $\mathsf{Var}\,\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}$.

Riešenie:
$$\mathsf{E}\,\mathbf{X} = \mathsf{E}\,(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\,\mathsf{E}\,\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu}$$
$$\mathsf{Var}\,\mathbf{X} = \mathsf{Var}\,(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}) = \mathbf{A}\,(\mathsf{Var}\,\mathbf{Z})\,\mathbf{A}^T = \mathbf{AA}^T = \boldsymbol{\Sigma}.$$

2. Diskuze k definici:
   - Je-li $\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n}$ pozitivně semidefinitní matice s hodností $h(\boldsymbol{\Sigma}) = r \leq n$, pak existuje matice $\mathbf{A}_{n\times r}$ taková, že $h(\mathbf{A}) = r$ a $\mathbf{AA}^T = \boldsymbol{\Sigma}$.
   - Rozdělení $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}$ z definice nezávisí na konkrétní volbě $\mathbf{A}$, závisí pouze na $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$.

3. Je-li $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $\boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^k$, pak $\mathbf{BX} + \boldsymbol{\mu}_2$ má rozdělení $\mathsf{N}_k(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{B\Sigma B}^T)$.

Riešenie:
$$\mathbf{BX} + \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{B}\,(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ}) + \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{BAZ},$$
z čoho plynie $\mathbf{BX} + \boldsymbol{\mu}_2 \sim \mathsf{N}_k\left(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{BA}\,(\mathbf{BA})^T\right) = \mathsf{N}_k\left(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{B\Sigma B}^T\right)$.

Poznámka: Dokonce platí, že $\mathbf{X}$ má mnohorozměrné normální rozdělení $\Leftrightarrow$ $\mathbf{c}^T\mathbf{X}$ má normální rozdělení pro každé $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

4. Existence hustoty:
   - Je-li $\boldsymbol{\Sigma}$ regulární, pak existuje hustota vzhledem k Lebesgueově míře a je tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Riešenie: Nech $S \subset \mathbb{R}^n$ je merateľná množina. Ak $\mathbf{\Sigma}$ je regulárna, matica $\mathbf{A}$ musí byť štvorcová a regulárna (singulárny rozklad matice $\mathbf{\Sigma}$). Pre $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ teda môžeme písať

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathbf{X} \in S) &= \mathsf{P}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ} \in S) = \mathsf{P}\left(\mathbf{Z} \in \mathbf{A}^{-1}(S - \boldsymbol{\mu})\right) \\
&= \int_{\mathbf{A}^{-1}(S-\boldsymbol{\mu})} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} z_i^2 \right\} \right) \mathrm{d}\,\mathbf{z} \\
&= \int_S \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\mu}) \right)^T \left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\mu}) \right) \right\} \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{s}}{\det \mathbf{A}} \\
&= \int_S \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \mathrm{d}\,\mathbf{s}.
\end{aligned}$$

kde sme využili Fubiniho vetu a transformáciu $\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Az}$. Z jednoznačnosti hustoty (Radon-Nikodýmova veta) plynie, že hustota $\mathbf{X}$ je skutočne $f_{\mathbf{X}}$. Špeciálne vidíme, že rozdelenie $\mathbf{X}$ skutočne závisí iba na $\boldsymbol{\mu}$ a $\mathbf{\Sigma}$, a nie na $\mathbf{A}$.

– Je-li $\mathbf{\Sigma}$ singulární, pak hustota vzhledem k Lebesgueově míře neexistuje.

Riešenie: Pre $\mathbf{\Sigma}$ singulárnu nájdeme vlastný vektor $\mathbf{v}$ matice $\mathbf{\Sigma}$, ktorý zodpovedá nulovému vlastnému číslu, tj. $\mathbf{v}^T\mathbf{\Sigma} = \mathbf{0}$. Potom ale $\mathbf{v}^T\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_1\left(\mathbf{v}^T\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{v}\right) = \mathsf{N}_1\left(\mathbf{v}^T\boldsymbol{\mu}, 0\right)$, čo je Diracova miera v bode $\mathbf{v}^T\boldsymbol{\mu}$. Dostávame teda, že $\mathbf{v}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}^T\boldsymbol{\mu}$ skoro iste, $\mathbf{X}$ je leží skoro iste v nadrovine kolmej na $\mathbf{v}$, a rozdelenie $\mathbf{X}$ nie je absolútne spojité voči Lebesgueovej miere na $\mathbb{R}^n$. Radon-Nikodýmova veta dáva, že hustota $\mathbf{X}$ voči Lebesgueovej miere na $\mathbb{R}^n$ nemôže existovať.

5. Nechť $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ a označme $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$, kde $\mathbf{X}_1$ tvoří prvních k složek $\mathbf{X}$.

(i) Marginální rozdělení $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ je normální, speciálně $\mathbf{X}_1 \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{\Sigma}_{11})$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)^T$ a $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{12}^T & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$.

Riešenie: Voľme $\mathbf{B} = \left(I_k \mid \mathbf{0}_{k\times(n-k)}\right)$ maticu zloženú z jednotkovej matice o dimenzii k, a nulovej matice o rozmere $k \times (n-k)$. Potom $\mathbf{X}_1 = \mathbf{BX} \sim \mathsf{N}_k\left(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B\Sigma B}^T\right) = \mathsf{N}_k\left(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{\Sigma}_{11}\right)$.

(ii) Je-li $\mathbf{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$, pak jsou $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ nezávislé.

Riešenie: Nech $\mathbf{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$. Z časti (i) vieme, že $\mathbf{\Sigma}_{11}$ a $\mathbf{\Sigma}_{22}$ sú variančné matice. Môžeme teda nájsť matice $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$ tak, že platí $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T = \mathbf{\Sigma}_{11}$ a $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^T = \mathbf{\Sigma}_{22}$. Dostávame $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$ pre $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$. Môžeme teda vyjadriť

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{AZ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{Z}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{Z} = \left(\mathbf{Z}_1^T, \mathbf{Z}_2^T\right)^T$ je vektor nezávislých veličín s rozdelením $\mathsf{N}(0,1)$. Vidíme, že $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ sú funkciami nezávislých vektorov $\mathbf{Z}_1$ a $\mathbf{Z}_2$, a teda sú nezávislé.

6. Nechť $X \sim \mathsf{N}(0,1)$ a nechť $1/2 = \mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}(Z=-1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Definujme $Y = Z \cdot X$. Ukažte, že

(a) X i Y mají rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$,

Riešenie: Nájdime distribučnú funkciu Y. Pre $y \in \mathbb{R}$ môžeme písať

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y \le y) &= \mathsf{P}(X \cdot Z \le y) \\
&= \mathsf{P}(X \cdot Z \le y \mid Z = 1)\, \mathsf{P}(Z=1) + \mathsf{P}(X \cdot Z \le y \mid Z=-1)\, \mathsf{P}(Z=-1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathsf{P}(X \le y) + \mathsf{P}(-X \le y)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathsf{P}(X \le y) + (1 - \mathsf{P}(X < -y))\right) \\
&= \mathsf{P}(X \le y),
\end{aligned}$$

kde sme využili symetriu a absolútnu spojitosť rozdelenia X.

(b) veličiny X a Y jsou nekorelované, ale závislé,

Riešenie: Máme

$$\mathsf{E}\,(X \cdot Y) = \mathsf{E}\left(X^2 \cdot Z\right) = \mathsf{E}\, X^2 \mathsf{E}\, Z = 0,$$

a tiež $\mathsf{E}\, X = 0$ a $\mathsf{E}\, Z = 0$, teda X a Y sú nekorelované. Sú však závislé, pretože napríklad pre obdĺžnik $[1,2] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$0 = \mathsf{P}(X \in [1,2], Y \in [-1,1]) \neq \mathsf{P}(X \in [1,2])\, \mathsf{P}(Y \in [-1,1]) > 0.$$

(c) sdružené rozdělení X a Y není normální.

Riešenie: Ak by združené rozdelenie X a Y bolo normálne, z príkladu 5, časť (ii) by už musela z nekorelovanosti plynúť nezávislosť. Tým by sme boli v spore s časťou (b).

7. Nechť $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$. Pak náhodná veličina $||\mathbf{X}||^2 = \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i^2$ má stejné rozdělení jako $\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i^2$, kde Y_i jsou iid veličiny s $\mathsf{N}(0,1)$ rozdělením a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla $\mathbf{\Sigma}$. Speciálně pak platí, že

- $\mathsf{E}\,||\mathbf{X}||^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})$,
- pokud má $\mathbf{\Sigma}$ vlastní čísla pouze 0 nebo 1, pak má veličina $\|\mathbf{X}\|^2$ rozdělení χ^2 se stupni volnosti rovnými $\mathrm{h}(\mathbf{\Sigma}) = \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma})$.

Riešenie: Použime reprezentáciu $\mathbf{X} = \mathbf{AZ}$ pre $\mathbf{Z}$ nezávislé $\mathsf{N}(0,1)$ veličiny, a spektrálny rozklad matice $\mathbf{\Sigma}$. Dostávame

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = (\mathbf{AZ})^T(\mathbf{AZ}) = \mathbf{Z}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{Z} = \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Q}\right)\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Z}\right),$$

kde $\mathbf{Q}$ je ortogonálna a $\mathbf{\Lambda}$ diagonálna. Označme $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Z}$. Z definície mnohorozmerného normálneho rozdelenia a ortogonality $\mathbf{Q}$ vidíme, že $\mathbf{Y} \sim \mathsf{N}_n\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{0}, \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right) = \mathsf{N}_n\left(\mathbf{0}, I_n\right)$. Časť (ii) príkladu 5 teda dáva, že zložky náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ sú nezávislé s rozdelením $\mathsf{N}(0,1)$. Diagonalita matice $\mathbf{\Lambda}$ umožňuje pravú stanu formuly vyššie prepísať ako

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{Y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i^2,$$

kde λ_i sú diagonálne členy matice $\mathbf{\Lambda}$, teda vlastné čísla matice $\mathbf{\Sigma}$.

8. Nalezněte asymptotickou aproximaci rozdělení χ^2_n pro velké n pomocí normálního rozdělení.

Riešenie: Vieme, že rozdelenie χ^2_n môžeme reprezentovať ako súčet n nezávislých náhodných veličín s rozdelením Z_i^2, kde $Z_i \sim \mathsf{N}(0,1)$. Označme $Y_i = Z_i^2$. Potom Y_i sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny so strednou hodnotou $\mathsf{E}\,Y_i = \mathsf{E}\,Z_i^2 = 1$ a rozptylom $\mathsf{Var}\,Y_i = \mathsf{E}\,Z_i^4 - 1 = 2$. Centrálna limitná veta dáva pre $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - 1\right) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0,2).$$

To môžeme prepísať ako

$$\frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2 - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0,1),$$

čo znamená že pre n veľké, χ^2_n bude rozdelenie blízke $\mathsf{N}(n, 2n)$.

9. Nechť $\mathbf{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, kde $\mathbf{\Sigma}$ je regulární. Pak

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_n.$$

Riešenie: Opäť použijeme reprezentáciu $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Z}$ pre $\mathbf{Z}$ nezávislé $\mathsf{N}(0,1)$ veličiny. Dostaneme

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{A}\mathbf{Z})^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^T\mathbf{A}^T\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T\mathbf{Z},$$

kde vpravo je súčet štvorcov n nezávislých $\mathsf{N}(0,1)$ náhodných veličín. To je definícia χ^2_n rozdelenia.

10. Nalezněte asymptotickou aproximaci rozdělení χ^2_n pro velké n pomocí normálního rozdělení.

Riešenie: Vieme, že rozdelenie χ^2_n môžeme reprezentovať ako súčet n nezávislých náhodných veličín s rozdelením Z_i^2, kde $Z_i \sim \mathsf{N}(0,1)$. Označme $Y_i = Z_i^2$. Potom Y_i sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny so strednou hodnotou $\mathsf{E}\, Y_i = \mathsf{E}\, Z_i^2 = 1$ a rozptylom $\mathsf{Var}\, Y_i = \mathsf{E}\, Z_i^4 - 1 = 2$. Centrálna limitná veta dáva pre $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - 1\right) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0,2).$$

To môžeme prepísať ako

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0,1),$$

čo znamená že pre n veľké, χ_n^2 bude rozdelenie blízke $\mathsf{N}(n, 2n)$.

11. Pro $n = 2$ ukažte, jak lze generovat náhodný vektor z rozdělení $\mathsf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ pro nějaké zadané $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbb{R}^2$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ pozitivně semidefinitní, umíme-li generovat náhodné veličiny z $\mathsf{N}(0,1)$.

Riešenie: Stačí nájsť maticu $\mathbf{A}$ takú, že $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ a použiť reprezentáciu $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Z}$. Spektrálny rozklad $\boldsymbol{\Sigma}$ vedie k symetrickej odmocninovej matici $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$, ktorá má ale všeobecne pomerne zložitý tvar. Jednoduchšia (nesymetrická) matica s danou vlastnosťou je napr.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Je jednoduché overiť, že platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$. Môžeme teda voliť

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

čiže

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + \sigma_1 Z_1, \\ X_2 &= \mu_2 + \sigma_2\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2\right). \end{aligned}$$

Opakování

Spektrální rozklad matice. Nechť $\mathbf{\Sigma}_{n\times n}$ je symetrická reálná matice. Pak existuje $\mathbf{Q}$ orthogonální a $\mathbf{\Lambda}$ diagonální matice takové, že

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T.$$

χ^2 rozdělení. Nechť $Z_1, \ldots, Z_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\mathsf{N}(0,1)$. Pak $Y = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ má χ^2 rozdělení s n stupni volnosti.

Význam normálního rozdělení: Mnohorozměrná centrální limitní věta. Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticí $\mathbf{\Sigma}$. Pak platí

$$\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \mathbf{\Sigma}), \quad n \to \infty.$$