ASYMPTOTICKÉ ROZDĚLENÍ

14.10.2019

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$ s hustotou $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} I[x \geq 0]$.
   (a) Nalezněte T_n maximálně věrohodný odhad λ.
   (b) Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti T_n pro $n \to \infty$.
   (c) Nalezněte asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(T_n - \lambda)$.
   (d) Uvažujte $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}[X_i > 1]$. Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti U_n a nalezněte asymptotické rozdělení U_n.
   (e) Definujme $V_n = -\log(U_n)$. Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti a nalezněte asymptotické rozdělení V_n.

2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x) = \dfrac{p}{x^{1+p}} \mathrm{I}[x \geq 1]$, kde $p > 0$.
   (a) Najděte T_n maximálně věrohodný odhad parametru p.
   (b) Ukažte, že pro $n \to \infty$ platí $T_n \xrightarrow{P} p$.
   (c) Najděte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $\sqrt{n}\,(T_n - p)$.
   (d) Uvažujte odhad $U_n = \overline{X}_n / (\overline{X}_n - 1)$. Ukažte, že se jedná o momentový odhad p a vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti U_n.
   (e) Odvoďte asymptotické rozdělení U_n.
   (f) Pro $p = 3$ odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $Z_n = (\overline{X}_n)^3$. Porovnejte rozptyl Z_n s jejím asymptotickým rozptylem.

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_x > 0$, a nechť $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou od nich nezávislé, a tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_y > 0$. Odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $T_n = \overline{X}_n / \overline{Y}_n$.

4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tvoří náhodný výběr z binomického rozdělení $\mathsf{Bi}(2, p)$, kde $p \in (0, 1)$. Nechť $Y_i = \mathrm{I}[X_i = 0]$.
   (a) Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti $U_n = \sqrt{\overline{X}_n + \overline{Y}_n - 1}$.
   (b) Nalezněte asymptotické rozdělení U_n.
   (c) Uvažujte náhodné vektory tvaru $(\overline{X}_n/2, U_n)^{\mathsf{T}}$. Vyšetřete jejich konvergenci v pravděpodobnosti a nalezněte asymptotické rozdělení.

Opakování z přednášky

Delta metoda

- *Jednorozměrná verze*: Nechť $\{T_n\}$ splňuje $\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 \geq 0$ a nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu μ, pak

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, [g'(\mu)]^2\sigma^2), \quad n \to \infty.$$

- *Obecná verze*: Nechť $\{\mathbf{T}_n\}$ splňuje $\sqrt{n}(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ pro nějaké $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ a $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ pozitivně semi-definitní, a nechť $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)^\mathsf{T} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ má spojitý Jakobián

$$\mathbb{D}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

na nějakém okolí bodu $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$. Pak

$$\sqrt{n}\,(\mathbf{g}(\mathbf{T}_n) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow{D} \mathsf{N}_m(\mathbf{0}, (\mathbb{D}\,\mathbf{g}(\mu))\boldsymbol{\Sigma}(\mathbb{D}\,\mathbf{g}(\mu))^\mathsf{T}), \quad n \to \infty.$$

Centrální limitní věta (CLV): Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ a konečnou rozptylovou maticí $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Pak platí

$$\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad n \to \infty.$$