Ukázková zápočtová písemka z NMSA331

Příklad 1. (45 bodů) Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \theta\,(1-x)^{\theta-1}, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Uvažujte následující odhady parametru θ

$$\widehat{\theta}_n = \frac{n}{-\sum_{i=1}^n \log(1-X_i)}, \qquad \widetilde{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

(a) Je odhad $\widehat{\theta}_n$ konzistentním odhadem parametru θ?
(b) Je odhad $\widetilde{\theta}_n$ konzistentním odhadem parametru θ?
(c) Najděte asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\theta}_n$.
(d) Sestavte dolní intervalový odhad pro θ^2 o spolehlivosti $1-\alpha$. Je tento odhad přesný nebo asymptotický?
(e) Najděte transformaci stabilizující rozptyl odhadu $\widehat{\theta}_n$ a pomocí této transformace sestavte oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti $1-\alpha$ pro parametr θ.

Příklad 2. (35 bodů) Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z binomického rozdělení s parametry 2 a $p \in (0,1)$ (neznámý parametr), tj.

$$\mathsf{P}(X_1 = i) = \binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i}, \quad i = 0,1,2.$$

Uvažujte následující odhady parametru $\theta_X = p^2$

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 2\}, \qquad \widetilde{\theta}_n = \frac{\left(\overline{X}_n\right)^2}{4}.$$

(a) Je odhad $\widehat{\theta}_n$ nestranným odhadem parametru θ_X?
(b) Je odhad $\widetilde{\theta}_n$ nestranným odhadem parametru θ_X?
(c) Odvoďte sdružené asymptotické rozdělení náhodného vektoru $(\widehat{\theta}_n, \widetilde{\theta}_n)^\top$. Na základě tohoto výsledku rozhodněte, který z odhadů byste doporučil(a)?

Příklad 3. (20 bodů) Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(\theta, \theta+1)$, tj. náhodná veličina X_1 má hustotu $f(x) = \mathrm{I}\big[x \in (\theta, \theta+1)\big]$. Uvažujte následující odhad

$$T_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i - 1$$

Rozhodněte, zda je odhad T_n konzistentním odhadem parametru θ_X. Pokud není, navrhněte, jak jej modifikovat, aby konzistentní byl.

Následující příklad řešte pouze v případě, že máte již úspěšně vyřešené bodované příklady 1-3 a že Vám i přesto ještě zbývá čas do konce časového limitu 90 minut.

Příklad 4. (bonus) Uvažujte situaci z příkladu 2 a odhady tvaru $V_n^{(a,b)} = a\widehat{\theta}_n + b\widetilde{\theta}_n$. Pro jaké $a, b \in \mathbb{R}$ dostaneme odhad, který je konzistentním odhadem θ_X a který má minimální rozptyl mezi všemi $V_n^{(a,b)}$ daného tvaru?