# Součty a funkce náhodných veličin

21.11.2024

1. Uvažujme posloupnost $n$ znaků, ve které se každý znak zkreslí s pravděpodobností $p \in (0,1)$, a to nezávisle na ostatních znacích. Nechť $X$ značí počet takto zkreslených znaků. Dále označme jako $Y_i$ identifikátor toho, zda se $i$-tý znak zkreslí.
   (a) Připomeňte si, jaké rozdělení má $X$ a jakou má střední hodnotu a rozptyl.
   (b) Vyjádřete $X$ pomocí veličin $Y_1, \dots, Y_n$ a pomocí tohoto vyjádření spočtěte $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{Var}\, X$.

2. V rybníce plave 100 rybiček, z nichž je $a$ zlatých. Náhodně vylovíme 5 rybiček a náhodná veličina $X$ udává, kolik zlatých rybiček jsme vylovili.
   (a) Vyjádřete analogicky jako v 1. příkladě veličinu $X$ jako součet 0-1 náhodných veličin $Y_i$. Určete rozdělení $Y_i$.
   (b) Spočtěte očekávanou hodnotu $X$.
   (c) Jsou veličiny $Y_1, \dots, Y_n$ nezávislé? Pokud nejsou, spočtěte jejich kovarianci.
   (d) Spočtěte rozptyl $X$.

3. Hmotnosti jednotlivých zásilek na poště jsou nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$. Rozhodli jsme se změřit hmotnosti $n$ zásilek a jsou to náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$.
   (a) Označme jako $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ průměrnou hmotnost zásilky. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny. Jak se bude rozptyl měnit, budeme-li zvyšovat $n$?

   Předpokládejme dále, že $X_i$ mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[a,b]$, kde $0 < a < b$ jsou reálná čísla. Označme jako $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$ maximální hmotnost a $L_n = \min_{i=1,\dots,n} X_i$ minimální hmotnost.
   (b) Vyjádřete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $M_n$.
   (c) Spočtěte očekávanou hodnotu $M_n$. Jak se bude tato hodnota chovat, budeme-li navyšovat počet pozorování $n$?
   (d) Spočtěte dále rozptyl $M_n$.
   (e) Vyjádřete rozdělení a spočtěte očekávanou hodnotu $L_n$.

4. Proveďte výpočet z předchozího příkladu pro veličiny $X_i$ s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = e^{-x} I(x \geq 0)$.

5. Předpokládejme, že počet automobilových nehod v daný den na dálnici D1 je náhodná veličina $X_i$, která se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, tj. $P(X_i = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ for $k = 0, 1, \dots$. Dále předpokládejme, že počty nehod v jednotlivých dnech jsou nezávislé náhodné veličiny.
   (a) Spočtěte očekávaný počet nehod v daný den.
   (b) Vyjádřete rozdělení a střední hodnotu počtu nehod za dva po sobě jdoucí dny.

6. Uvažujme nezávislé náhodné veličiny $X, Y$. Nalezněte rozdělení součtu $Z = X + Y$, pokud $X$ i $Y$ mají obě
   (a) binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(n,p)$ s parametry $n \geq 1$ a $p \in (0,1)$,
   (b) rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$,
   (c) exponenciální rozdělení s hustotou $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} I(x \geq 0)$ s parametrem $\lambda > 0$.

# Opakování

Jsou-li $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

$\mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E} X_i$

$\mathsf{Var}\,(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\, X_i + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j \mathsf{Cov}\,(X_i, X_j)$

Rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin: Mějme **nezávislé** náhodné veličiny $X$ a $Y$, a chceme určit rozdělení náhodné velčiny $Z = X + Y$.

- Pokud $X$ a $Y$ jsou obě diskrétní a takové, že $X, Y \in \mathbb{Z}$ skoro jistě (tj. obě $X$ i $Y$ nabývají pouze celočíselných hodnot), potom $Z$ také nabýva pouze celočíselných hodnot, a platí

$$P(Z = z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) \cdot P(Y = z - x) \quad \text{pro } z \in \mathbb{Z}.$$

- Pokud $X$ a $Y$ jsou obě absolutně spojité s hustotami $f_X$ a $f_Y$, potom $Z$ je také absolutně spojitá s hustotou $f_Z$ danou

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z - x) \, \mathrm{d}\, x \quad \text{pro } z \in \mathbb{R}.$$