

NÁHODNÉ VEKTORY

31.10.2024

1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
 - (a) Odvoďte rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^T$.
 - (b) Jaké jsou marginální rozdělení X a Y ?
 - (c) Jsou veličiny X a Y nezávislé?
2.
 - (a) Nechtě Z je počet mladších sester nejstaršího dítěte v rodině z příkladu 1. Napište sdružené a marginální rozdělení $(X, Z)^T$ a porovnejte s rozdělením $(X, Y)^T$.
 - (b) Navrhněte na pravděpodobnostním prostoru z příkladů 1 a 2 dvojici náhodných veličin $(U, V)^T$, které jsou nezávislé.
3. V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme z šuplíku 3 ponožky. Označme jako X počet vytažených bílých ponožek a Y je počet vytažených oranžových ponožek.
 - (a) Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)'$. Určete, s jakou pravděpodobností jsou mezi třemi vytaženými ponožkami alespoň dvě stejné.
 - (b) Jsou X a Y nezávislé?
4. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny X a Y . Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)'$ má spojitě rozdělení charakterizované sdruženou hustotou
$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
 - (a) Určete konstantu $c > 0$.
 - (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
 - (c) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než za jídlo?
5. Náhodná veličina X udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina Y udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ má spojitě rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
- (b) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
- (c) S jakou pravděpodobností je doba čekání na tramvaj delší než doba čekání na metro?

OPAKOVÁNÍ

SDRUŽENÉ ROZDĚLENÍ náhodného vektoru $(X, Y)^\top$:

- Jestliže $(X, Y)^\top$ nabývá pouze nejvýše spočetně mnoha různých hodnot $(x_i, y_j)^\top$, pak má $(X, Y)^\top$ diskrétní rozdělení a to je popsáno pomocí $P(X = x_i, Y = y_j)$.
- Jestliže má $(X, Y)^\top$ spojitě rozdělení, je toto rozdělení popsáno hustotou $f(x, y)$ a platí

$$P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in B\right) = \iint_B f(x, y) dx dy, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

MARGINÁLNÍ ROZDĚLENÍ:

- Jestliže má $(X, Y)^\top$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j) , pak marginální rozdělení veličiny X je diskrétní a spočteme jej jako

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

- Jestliže má $(X, Y)^\top$ spojitě rozdělení s hustotou $f(x, y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y .

NEZÁVISLOST:

- Jestliže má $(X, Y)^\top$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot $(x_i, y_j)^\top$, pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } x_i, y_j.$$

- Jestliže má $(X, Y)^\top$ spojitě rozdělení s hustotou f , X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y , pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$