Náhodná veličina se spojitým rozdělením
24.10.2024

1. Předpokládejte, že máme k dispozici perfektní generátor náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$. Označme jako X náhodnou veličinu, která nám udává vygenerované číslo.
   (a) Jakým způsobem popíšeme rozdělení X? Zapište a nakreslete graf.
   (b) Nakreslete graf distribuční funkce. V obou obrázcích zakreslete pravděpodobnost, s jakou dostaneme číslo menší než 0.5. S jakou pravděpodobností dostaneme přesně 0.5?
   (c) Získané náhodné číslo X umocníme na druhou a dostaneme tak jiné náhodné číslo Y z intervalu $[0, 1]$. Je rozdělení Y stejné jako rozdělení X?
   (d) Jak pomocí X dostaneme náhodné číslo z intervalu $[a, b]$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$?

2. Doba strávená čekáním na příjezd vlaku (v minutách) je náhodná veličina s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/5}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$, aby f byla hustota.
   (b) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji.
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že budete na vlak čekat déle než 5 minut? Vyznačte v grafu hustoty a v grafu distribuční funkce.
   (d) S jakou pravděpodobností bude doba strávená čekáním mezi 2 a 5 min?
   (e) Aktuálně čekáte 5 min. Jaká je pravděpodobnost, že budete celkově čekat déle než 10 min?
   (f) Během čekání na vlak si prohlížíte internet na mobilu, přičemž Vám za to Váš operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč a pak spojitou sazbu 3Kč/min. Náhodná veličina Y udává, kolik peněz takto utratíte. Určete rozdělení Y (distribuční funkci a hustotu) a spočtěte, s jakou pravděpodobností utratíte během čekání na vlak více než 35 Kč.
   (g) Váš kamarád má jiný tarif: Operátor mu účtuje 1 Kč za každou započatou minutu. Náhodná veličina Z udává, kolik peněz utratí během čekání na vlak Váš kamarád. Určete rozdělení Z.
   (h) Určete rozdělení náhodné veličiny $U = F(X)$, kde F je distribuční funkce spočtená v (b).
   (i) Navrhněte, jak nasimulovat výše uvedené doby čekání, umíme-li generovat náhodné číslo z intervalu $[0, 1]$.

3. Uvažujte náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} c(1 - |x - 1|) & x \in (0, 2) \\ 0 & \text{jinak}. \end{cases}$$
   (a) Nalezněte konstantu $c > 0$, tak aby f byla hustota.
   (b) Spočítejte, s jakou pravděpodobností bude X větší než $1/2$.
   (c) Určete distribuční funkci X a nakreslete její graf.

4. Uvažujte spojité rozdělení s hustotou $f(x) = ce^{-|x|}$. Dopočítejte konstantu c a určete, s jakou pravděpodobností bude náhodná veličina s tímto rozdělením v absolutní hodnotě větší než 2.

Opakování

Náhodná veličina: **Náhodná veličina** X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Jednotlivým prvkům $\omega \in \Omega$ tedy přiřazuje reálná čísla $X(\omega)$.

Spojitá náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$. Její rozdělení je charakterizováno **hustotou** $f \geq 0$. Pro každou $B \in \mathcal{B}$ je pak

$$\mathsf{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Speciálně:

–

$$1 = \mathsf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

– **distribuční funkce** F je spojitá na $\mathbb{R}$ a lze ji spočítat jako

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

– pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\mathsf{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(t)dt = 0$,

– je-li $a < b$, pak

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \mathsf{P}(a < X \leq b) = \mathsf{P}(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$