

NEZÁVISLOST, NÁHODNÁ VELIČINA

17.10.2024

-
1. Student, který se na zápočtovou písemku z Pravděpodobnosti a statistiky učil, ji úspěšně napíše s pravděpodobností 0,8. Naopak student, který se neučil, uspěje s pravděpodobností 0,1. Spočtete, s jakou pravděpodobností se student, který napsal úspěšně písemku, učil, pokud studenti, kteří se svědomitě připravují tvoří
 - (a) dvě třetiny všech studentů,
 - (b) desetinu všech studentů.
 2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A =[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je liché].
 - (a) Určete podmíněnou pravděpodobnost jevu A , když víme, že nastal jev C .
 - (b) Jsou jevy A , B a C po dvou nezávislé?
 - (c) Jsou jevy A , B , C nezávislé?
 3. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance. Pravděpodobnosti zásahu jsou po řadě rovny 0,2, 0,4 a 0,6 a lovci střílí nezávisle na sobě.
 - (a) S jakou pravděpodobností kance zastřelil první střelec, byl-li kanec zasažen jedinou střelou?
 - (b) Nechť náhodná veličina X udává počet střel, které zasáhly kance. Určete rozdělení X a nakreslete distribuční funkci.
 4. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrťává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
 - (a) Odvoďte rozdělení veličiny X a načrtněte graf distribuční funkce.
 - (b) Za každou správnou odpověď dostane student 2 body a za špatnou naopak 2 body ztratí. Určete pro $n = 10$ rozdělení náhodné veličiny Y , která udává celkový počet bodů studenta.
 5. Adam hází opakovaně na basketbalový koš, dokud se netrefí. V každém hodu se trefí s pravděpodobností 0.2, a to nezávisle na svých předchozích výsledcích.
 - (a) Nechť náhodná veličina X udává celkový počet hodů na koš. Určete rozdělení této náhodné veličiny.
 - (b) S jakou pravděpodobností hodí Adam více než pětkrát?
 - (c) S jakou pravděpodobností hodí Adam více než desetkrát, když se ani pátým pokusem netrefil?
 6. Nyní se v házení na koš střídají Adam a Bedřich. Adam se v každém svém pokusu trefí s pravděpodobností 0,2 a Bedřich s pravděpodobností 0,3, a to nezávisle na svých předchozích výsledcích a výsledcích protihráče. Hra končí ve chvíli, kdy padne první koš.
 - (a) Náhodná veličina X udává celkový počet hodů na koš. Určete její rozdělení.
 - (b) Je pravděpodobnější, že vyhraje celou hru Adam nebo Bedřich?

OPAKOVÁNÍ

BAYESOVA VĚTA: Necht' $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $P(B_i) > 0$ pro všechna i a necht' $P(A) > 0$. Pak

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$

NEZÁVISLOST. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_r}).$$

(Tj. součinnou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

NÁHODNÁ VELIČINA: **Náhodná veličina** X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Jednotlivým prvkům $\omega \in \Omega$ tedy přiřazuje reálná čísla $X(\omega)$.

- **Rozdělení** náhodné veličiny X

- popisuje pravděpodobnosti $P(X \in B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ pro všechny množiny $B \in \mathcal{B}$,
- je jednoznačně určeno **distribuční funkcí**, která je funkcí reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ a je definovaná jako

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Distribuční funkce je vždy neklesající, zprava spojitá s limitou 0 v $-\infty$ a limitou 1 v ∞ .

- Platí $P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$ pro libovolné $a < b$.

- Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \dots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k .