Klasická pravděpodobnost

2.10.2019

1. V rybníku plave 100 rybiček, z nichž 5 je zlatých a ostatní jsou obyčejné. Náhodně vylovíme do podběráku tři rybičky.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že jsme nevylovili ani jednu zlatou rybičku?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že máme alespoň dvě zlaté rybičky?
   (c) Jak by se (a) a (b) změnilo, pokud bychom pokus provedli jinak a rybičky lovili postupně s vracením do vody?

2. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek s již nadepsanou adresou. Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ a zjistěte, jak se tato limita liší od přesného výsledku pro $n = 5$ a $n = 10$.

3. Na cvičení z Pravděpodobnosti a statistiky se r studentů rozděluje do n paralelek cvičení. Předpokládejme, že každý student si vybírá skupinu náhodně a že počet studentů ve skupinách je neomezený.
   (a) Určete pravděpodobnost, že na pondělní cvičení se přihlásí právě k studentů.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že na každém cvičení bude alespoň jeden student?
   (c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

4. Uvažujte třídu n osob.
   (a) S jakou pravděpodobností v této třídě existuje alespoň jedna osoba, která má narozeniny na Štědrý den?
   Vyčíslete pro $n = 30$ a $n = 100$.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že v této třídě existují dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den?
   (c) Kolik nejméně osob musí být ve třídě, aby pravděpodobnost z (b) byla vyšší než 1/2?

   Pro jednoduchost vždy uvažujte, že rok má 365 dní a že se lidé rodí rovnoměrně během roku.

Opakování

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$
kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$,
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B^c)$,
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)
$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i<j}\sum \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$