Klasická pravděpodobnost

24.–28. 2. 2020

1. Házíme postupně šesti kostkami — modrou, zelenou a čtyřmi oranžovými.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že na modré kostce padne sudé číslo?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že čísla, která padla na modré a zelené kostce, mají sudý součet a lichý součin?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že čísla, která padla na modré a zelené kostce, mají sudý součet nebo lichý součin?
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že součet hodnot na oranžových kostkách je < 7?
   (e) Jaká je pravděpodobnost, že posloupnost hodnot, které padly na jednotlivých kostkách je monotónní?
   (f) Jaká je pravděpodobnost, že maximální hodnota, která padla na šesti kostkách, je 5?

2. Z balíčku 32 karet náhodně vybereme postupně čtyři karty (s vracením).
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli čtyři různé karty?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli právě dvě esa?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli alespoň dvě esa?
   (d) Jak by se změnili pravděpodobnosti z (a), (b), (c), pokud bychom tahy prováděli bez vracení?

3. Uvažujme n různých dopisů, jimž odpovídá n různých obálek (každý dopis patří do právě jedné obálky). Avšak zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ a zjistěte, jak se tato limita liší od přesného výsledku pro $n = 5$ a $n = 10$.

4. (**Maxwellovo-Boltzmannovo schéma.**)
   Na cvičení z Pravděpodobnosti a matematické statistiky se r studentů rozděluje do n paralelek cvičení. Předpokládejme, že každý student si vybírá skupinu náhodně a že počet studentů ve skupinách je neomezený.
   (a) Určete pravděpodobnost, že na cvičení v pondělí v 17:20 přijde právě k studentů.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že na každém cvičení bude alespoň jeden student?
   (c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

5. Uvažujme třídu n osob. Jaká je pravděpodobnost, že v této třídě existují dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den? Kolik nejméně osob musí být ve třídě, aby tato pravděpodobnost byla vyšší než 0.9?
   (Pro jednoduchost uvažujme, že rok má 365 dní a že se lidé rodí rovnoměrně během roku).

Opakování

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu,
- $\omega \in \Omega$ elementární jev,
- $A \subset \Omega$ náhodný jev.
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$
kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$,
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B^c)$,
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum\sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \sum\sum\sum_{i<j<k} \mathsf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$