

Přímka v rovině

Parametrické vyjádření

Nejintuitivnější způsob popisu přímky vychází ze skutečnosti, že přímku (označme p) můžeme jednoznačně zadat bodem, který na ní leží (označme P), a tzv. směrovým vektorem (ten nesmí být nulový). Směrový vektor označme $\vec{s}$. Libovolný bod X přímky pak získáme jako součet daného bodu P a příslušného násobku směrového vektoru $\vec{s}$, neboli můžeme říci, že pro každý bod X přímky p existuje reálné číslo t takové, že

$$X = P + t \cdot \vec{s}$$

a množinu všech bodů přímky p můžeme popsat jako

$$p = \{X + t \cdot \vec{s}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Proměnná t se nazývá parametr, odtud termín *parametrické vyjádření přímky*.

Často potřebujeme pracovat zvláště s jednotlivými souřadnicemi bodů/vektorů. Označíme-li $P = [p_1; p_2]$, $\vec{s} = (s_1; s_2)$ a $X = [x_1; x_2]$, potom

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + s_1 \cdot t, \\ x_2 &= p_2 + s_2 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V literatuře se pro souřadnice obecného bodu popisované přímky často namísto označení x_1, x_2 používá x, y . Podotkněme ještě, že parametricky lze popsat přímku v prostoru libovolné dimenze, zatímco dále uvedené rovnice přímky jsou použitelné pouze v dvoudimenzionálním prostoru.

Jednou z výhod parametrického vyjádření přímky je, že omezením hodnot parametru můžeme snadno popsat jen část přímky (typicky úsečku nebo polopřímku). Naopak nevýhodou je, že jednu a tutéž přímku lze popsat různými parametrickými vyjádřeními, stačí uvažovat namísto bodu P jiný bod přímky nebo místo daného vektoru $\vec{s}$ použít jeho libovolný nenulový násobek.

Úlohy

- 1) Zapište parametrické vyjádření přímky, která prochází body $A[6; -1]$, $B[3; 5]$.

Řešení: $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-3; 6) \sim (-1; 2)$

$$\longleftrightarrow AB = \{[6 - t; -1 + 2t], t \in \mathbb{R}\}$$

Jako směrový vektor lze uvažovat také např. vektor $\overrightarrow{BA}$ nebo jeho násobek, za určující bod namísto A můžeme vzít bod B .

- 2) Zapište parametrické vyjádření úsečky AB , jestliže $A[6; -1]$, $B[3; 5]$.

Řešení: Pokud za určující bod vezmeme bod A a za směrový vektor $\overrightarrow{AB}$ (původní, ničím nevy-násobený), potom $\overrightarrow{AB} = \{[6 - 3t; -1 + 6t], t \in \langle 0; 1 \rangle\}$. Pokud použijeme vektor $(-1; 2)$, tj. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, musíme upravit interval hodnot parametru t , tedy $\overrightarrow{AB} = \{[6 - t; -1 + 2t], t \in \langle 0; 3 \rangle\}$.

- 3) Rozhodněte, zda následující dvě různá parametrická vyjádření popisují tutéž přímku.

$$[x = -2 - t; y = 3 + 2t; t \in \mathbb{R}]$$

$$[x = 1 + 2t; y = -3 - 4t; t \in \mathbb{R}]$$

Řešení: Nejprve zkontrolujeme, zda jsou směrové vektory z obou vyjádření lineárně závislé. Pokud ne, nemůže se jednat o totožné přímky. Pokud ano, zbývá ověřit, zda rovnost x -ových souřadnic nastává pro touž hodnotu parametru t jako rovnost y -ových souřadnic. Zde zadaná vyjádření popisují tutéž přímku.

Obecná rovnice přímky

Obecnou rovnicí přímky p rozumíme rovnici ve tvaru $ax + by + c = 0$, kde x, y jsou souřadnice libovolného bodu přímky a a, b, c jsou reálné koeficienty, přičemž alespoň jeden z koeficientů a, b musí být nenulový.

Obecnou rovnici přímky lze získat odvozením z parametrického vyjádření tzv. vyloučením parametru. Uvažujme přímku p určenou bodem P a směrovým vektorem $\vec{s}$ z předchozího textu a souřadnice libovolného bodu X této přímky označme x, y , tj. vyjděme od parametrického vyjádření

$$x = p_1 + s_1 \cdot t, \quad (1)$$

$$y = p_2 + s_2 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Jedná se o soustavu rovnic, z níž chceme vyloučit parametr t . První rovnici proto vynásobíme s_2 , druhou $-s_1$ (za předpokladu, že $s_1 \neq 0$ a $s_2 \neq 0$) a získané rovnice sečteme. Vyjde

$$s_2x - s_1y + s_1p_2 - s_2p_1 = 0.$$

Označíme-li $a = s_2$, $b = -s_1$ a $c = s_1p_2 - s_2p_1$, obdržíme výše uvedený tvar $ax + by + c = 0$. Zároveň je patrný význam koeficientů a, b – jedná se o souřadnice vektoru kolmého ke směrovému vektoru $\vec{s}$, neboť $(a; b) \cdot (s_1; s_2) = 0$. Tento vektor nazýváme *normálovým vektorem přímky*, obvykle jej značíme $\vec{n}$.

Je-li některá souřadnice vektoru $\vec{s}$ rovna nule, pak v jedné z rovnic (1), (2) již parametr není a tato rovnice je již de facto rovnicí v obecném tvaru. Je-li například $s_1 = 0$, potom pro x -ovou souřadnici libovolného bodu přímky platí $x = p_1 + 0 \cdot t$, tj. $x = p_1$ (aneb na přímce leží body, jejichž x -ová souřadnice je p_1 , na y -ové souřadnici nezáleží). Obecná rovnice v anulovaném tvaru a po přeznačení $c = -p_1$ má podobu $x + c = 0$, koeficient a je roven 1 a koeficient b je roven 0.

Úlohy

- 1) Zapište obecnou rovnici přímky $p = \{[x = -2 - t; y = 3 + 2t; t \in \mathbb{R}]\}$.

Řešení: Vyloučením parametru t získáme rovnici $2x + y + 1 = 0$.

- 2) Zapište obecnou rovnici přímky $q = \{[x = -2; y = 3 + 2t; t \in \mathbb{R}]\}$.

Řešení: Obecná rovnice odpovídá parametrickému vyjádření x -ové souřadnice, neboť tato souřadnice směrového vektoru je nulová (daná přímka je rovnoběžná s osou y). Tedy:

$$x + 2 = 0.$$

- 3) Zapište parametrické vyjádření přímky p , která je kolmá k přímce q : $2x - 5y + 7 = 0$ a prochází bodem $P[3; -1]$.

Řešení: Normálový vektor $\vec{n}_q = (2; -5)$ přímky q je zároveň směrovým vektorem přímky p . Normálový vektor $\vec{n}_p$ přímky q k němu musí být kolmý, tedy musí platit $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 0$. Odtud například $n_p = (5; 2)$.

Nyní známe koeficienty a, b obecné rovnice $ax + by + c = 0$. Pro dourčení koeficientu c v rovnici $5x + 2y + c = 0$ přímky p dosadíme souřadnice bodu P . Vyjde $c = -13$, tedy

$$p: 5x + 2y - 13 = 0.$$

Směrnice tvar obecné rovnice přímky

Směrnice tvarem rovnice přímky nazýváme rovnici ve tvaru $y = kx + q$, kde x, y jsou souřadnice libovolného bodu přímky a k, q jsou reálné koeficienty. Tento tvar získáme, pokud z obecné rovnice vyjádříme y . Abychom to mohli provést, musí se proměnná y v obecné rovnici vyskytovat, tj. koeficient b musí být nenulový, což znamená, že daná přímka nesmí být rovnoběžná s osou y .

Uvažujme tedy obecnou rovnici přímky p , tj. rovnici ve tvaru $ax + by + c = 0$, kde $b \neq 0$. Vyjádříme-li y , získáme:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

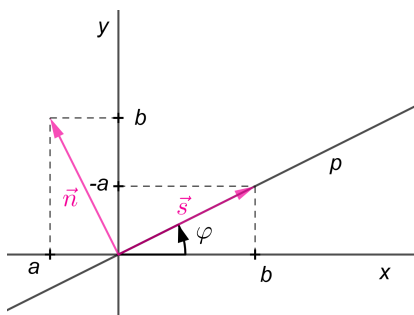
Označíme-li $k = -\frac{a}{b}$ a $q = -\frac{c}{b}$, obdržíme výše uvedenou podobu rovnice:

$$y = kx + q.$$

Zároveň si ze vztahu $k = -\frac{a}{b}$ můžeme uvědomit souvislost hodnoty koeficientu k s normálovým, resp. směrovým vektorem přímky p . V obrázku nahlédneme, že

$$k = \tan \varphi,$$

kde α je velikost orientovaného úhlu, který přímka p svírá s kladnou poloosou x . Koeficient k nazýváme *směrnici přímky*.



Úlohy

- 1) Zapište směrnice tvar rovnice přímky, která prochází body $A = [2; 1]$, $B = [3; 2]$.

Řešení: Z umístění bodů A, B v KSS je patrné, že odchylka hledané přímky od kladné poloosy x je $\frac{\pi}{4}$, tedy pro směrnici k platí $k = \tan \frac{\pi}{4} = 1$. Dosazením libovolného z bodů A, B do rovnice $y = 1 \cdot x + q$ získáme $q = -1$. Směrnice tvar rovnice přímky má tedy podobu $y = x - 1$.

- 2) Určete hodnotu směrnice přímky, jejíž parametrické vyjádření je $[x = -2 - t; y = 3 + 2t; t \in \mathbb{R}]$.

Řešení: Směrový vektor $\vec{s}$ dané přímky má souřadnice $(-1; 2)$. Souřadnice normálového vektoru tedy jsou například $(2; 1)$. Pro směrnici k potom platí:

$$k = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$$

- 3) Dokažte, že součin směrnice navzájem kolmých přímek, z nichž žádná není rovnoběžná s osou y , je roven -1 .

Řešení: Uvažujme obecné rovnice dvou navzájem kolmých přímek p, q :

$$p: ax + by + c = 0 \quad (a \neq 0; b \neq 0)$$

$$q: bx - ay + c = 0$$

Pro jejich směrnice k_p, k_q potom platí:

$$k_p \cdot k_q = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$$

Úsekový tvar obecné rovnice přímky

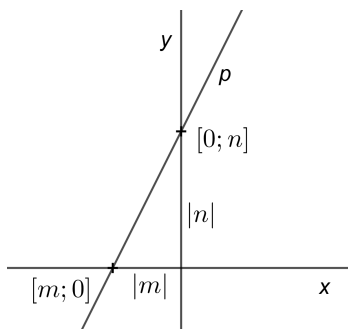
Úsekovým tvarem rovnice přímky nazýváme rovnici ve tvaru $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, kde x, y jsou souřadnice libovolného bodu přímky a m, n jsou reálné koeficienty různé od 0. Také tento tvar získáme úpravou obecné rovnice $ax + by + c = 0$ a to právě tehdy, pokud jsou koeficienty a, b, c různé od nuly, což znamená, že daná přímka nesmí procházet počátkem kartézské soustavy souřadnic ani být rovnoběžná s některou z os této soustavy.

Uvažujme tedy obecnou rovnici přímky p , tj. rovnici ve tvaru $ax + by + c = 0$, kde $a \neq 0, b \neq 0$ a $c \neq 0$. Převedeme c na pravou stranu a celou rovnici vydělíme $-c$. Po úpravě získáme

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1.$$

Označíme-li $m = -\frac{c}{a}$ a $n = -\frac{c}{b}$, obdržíme výše uvedenou podobu rovnice: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

Můžeme si všimnout, že pokud do této rovnice dosadíme $y = 0$ (tj. hledáme průsečík přímky p s osou x), vyjde $x = m$. Obdobně dosadíme-li $x = 0$ (tj. hledáme průsečík přímky p s osou y), vyjde $y = n$. Koeficienty m, n tedy odpovídají nenulovým souřadnicím průsečíků přímky p s osami soustavy souřadnic, aneb vymezují „úseky“ na osách mezi počátkem KSS a průsečíky přímky p (viz obrázek). Odtud pramení termín *úsekový tvar* rovnice přímky.



Úlohy

- 1) Zapište úsekový tvar rovnice přímky, která prochází body $A = [2; 0]$, $B = [4; 3]$.

Řešení: Např. z obrázku nahlédneme (popřípadě můžeme přímku popsat parametricky či obecnou rovnicí a vypočítat průsečík s osou y , průsečíkem s osou x je bod A), že přímka protíná osy v bodech $[2; 0]$, $[0; -3]$. Úsekový tvar její rovnice je tedy:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1, \text{ resp. } \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$

- 2) Úpravou obecné rovnice $3x - \frac{2}{5}y + 4 = 0$ získejte úsekový tvar a zapište souřadnice průsečíků s osami kartézské soustavy souřadnic.

Řešení: Konstantu 4 převedeme na pravou stranu a rovnici vydělíme -4 . Po úpravě obdržíme:

$$\frac{x}{-\frac{4}{3}} + \frac{y}{10} = 1.$$

Průsečíky s osami jsou $\left[-\frac{4}{3}; 0\right]$, $[0; 10]$.

- 3) Vypočítejte obsah trojúhelníku ohraničeného osami x, y a přímkou p , jejíž rovnice je $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$.

Řešení: Úseky vyřezané přímkou p na osách mají délky 3 a 5, jedná se tedy o pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami dlouhými 3 a 5. Obsah trojúhelníku je $\frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$.

Několik poznámek závěrem

- Uvedené pořadí tvarů rovnic přímky odpovídá obvyklému pořadí, v jakém se žáci střední školy v analytické geometrii s rovnicemi přímky seznamují. Úsekový tvar se na některých školách ani neprobírá.
- S rovnicí přímky se žák setká poprvé v podobě předpisu lineární funkce. Tento předpis odpovídá směrnicovému tvaru přímky.
- Parametrické vyjádření přímky je nejuniverzálnější popis přímky. Lze jej použít pro popis přímky v rovině i v prostoru, omezením hodnot parametru lze snadno popsat jen část přímky (úsečku, polopřímku).
- Přímku v prostoru nelze popsat obecnou rovnicí. Obecně platí, že obecnou rovnicí můžeme v daném prostoru popsat pouze nadrovinu (tj. v n -dimenzionálním prostoru podprostor dimenze $n - 1$). V trojrozměrném prostoru můžeme obecnou rovnicí popsat rovinu.
- Parametrickým vyjádřením nebo obecnou rovnicí lze popsat libovolnou přímku v rovině.
- Směrnicovým tvarem nelze popsat přímky rovnoběžné s osou y (jejich odchylka od kladné polosu x je $\frac{\pi}{2}$ a $\tan \frac{\pi}{2}$ není definován).
- Úsekovým tvarem lze popsat jen takové přímky, které vytváří na osách x , y nenulové „úseky“, tj. neprochází počátkem soustavy souřadnic ani nejsou rovnoběžné s některou ze souřadnicových os.

Literatura

- Kočandrle, M., & Boček, L. (2007) *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie*. Prometheus.
- Petáková, J. (2004) *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus.
- Moravcová, V. (2023) Zavedení přímky v analytické geometrii. *Učitel matematiky*, 31 (3), 183–198.