

Analytická geometrie lineárních útvarů

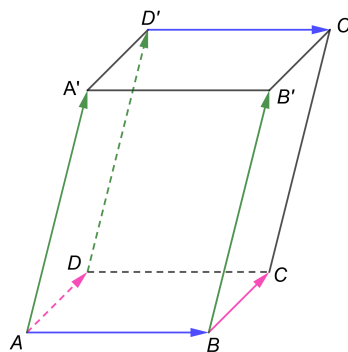
bod, vektor, velikost vektoru, lineární kombinace vektorů

- 1) Jsou dány body $A[1; -2; 3]$, $B[2; -3; 4]$, $D[3; 3; -1]$, $A'[4; 4; 6]$. Určete souřadnice zbývajících vrcholů rovnoběžnostěnu $ABCD A' B' C' D'$.

Řešení: Z daných souřadnic určíme souřadnice vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{AA'}$. Pro vrcholy rovnoběžnostěnu platí např. $C = B + \overrightarrow{AD}$, $B' = B + \overrightarrow{AA'}$, $D' = D + \overrightarrow{AA'}$, $C' = D' + \overrightarrow{AB}$ (viz obr.). Tedy:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (1; -1; 1), \\ \overrightarrow{AD} &= D - A = (2; 5; -4), \\ \overrightarrow{AA'} &= A' - A = (3; 6; 3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= [4; 2; 0], \\ B' &= [5; 3; 7], \\ D' &= [6; 9; 2], \\ C' &= [7; 8; 3].\end{aligned}$$



Pro kontrolu lze souřadnice jednotlivých bodů spočítat jako součet souřadnic jiného odpovídajícího vrcholu a vektoru, např. je také $C = D + \overrightarrow{AB}$ apod.

- 2) Ukažte, že body $A[1; 2; 3]$, $B[-2; 5; 6]$, $C[0; -3; 4]$ jsou vrcholy trojúhelníku.

Řešení: Z daných bodů sestavíme dva vektory (každý bod využijeme) a prověříme jejich lineární nezávislost. Tj. např. pro vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ musí platit:

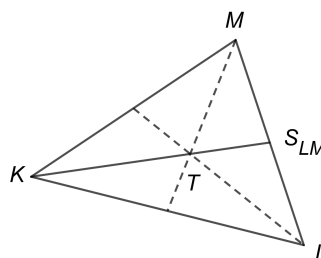
$$\forall k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$$

Jelikož je $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 3)$ a $\overrightarrow{AC} = (-1; -5; 1)$, je zřejmé, že vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ nejsou lineárně závislé. (Formálně lze argumentovat, že pro spor volíme dle první souřadnice $k = 3$, avšak pro druhou souřadnici již neplatí, že $3 = 3 \cdot (-5)$, a tedy skutečně $\forall k$ platí výše uvedený vztah.)

- 3) Určete souřadnice těžiště T a délku těžnice na stranu k trojúhelníku KLM , jestliže $K[4; 7]$, $L[-7; 4]$, $M[0; -1]$.

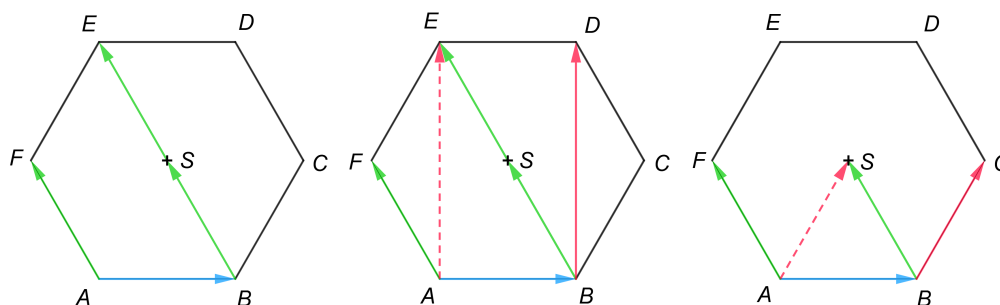
Řešení: Těžnice trojúhelníku je úsečka spojující vrchol se středem protilehlé strany. Těžnice na stranu k tedy spojuje vrchol K se středem S_{LM} strany LM . Délka těžnice k je rovna velikosti vektoru $\overrightarrow{KS_{LM}}$ a těžiště T získáme jako součet bodu K a $\frac{2}{3}$ vektoru $\overrightarrow{KS_{LM}}$, neboť těžiště trojúhelníku dělí každou těžnici v poměru 2 : 1.

$$\begin{aligned}S_{LM} &= \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}M = \left[-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right], \\ \overrightarrow{KS_{LM}} &= S_{LM} - K = \left(-\frac{15}{2}; -\frac{11}{2}\right), \\ \|\overrightarrow{KS_{LM}}\| &= \frac{\sqrt{346}}{2}, T = \left[-1; \frac{10}{3}\right].\end{aligned}$$



- 4) Necht' rovinný útvar $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník. Vyjádřete vektory $\vec{BE}$, $\vec{BD}$, $\vec{BC}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{AB}$ a $\vec{AF}$.

Řešení: Využijeme shodnost vektorů plynoucí z vlastností pravidelného šestiúhelníku, jehož střed dále značíme S .



$$\vec{BE} = 0 \cdot \vec{AB} + 2 \cdot \vec{AF}, \text{ jelikož } \vec{AF} = \vec{BS} = \vec{SE}.$$

$$\vec{BD} = 1 \cdot \vec{AB} + 2 \cdot \vec{AF}, \text{ jelikož } \vec{BD} = \vec{AE} \text{ a opět využijeme } \vec{AF} = \vec{BS} = \vec{SE}.$$

$$\vec{BC} = 1 \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AF}, \text{ jelikož } \vec{BC} = \vec{AS} \text{ a stejně jako v předchozím využijeme, že } \vec{AF} = \vec{BS}.$$

- 5) Je dán vektor $\vec{u} = (2; 3)$. Určete $q \in \mathbb{R}$ tak, aby pro vektor $\vec{v} = (q; 2q)$ platilo $\|4\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{61}$.

Řešení: $4\vec{u} - \vec{v} = (8 - q; 12 - 2q)$, po dosazení do dané rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} \|(8 - q; 12 - 2q)\| &= \sqrt{61} \quad |^2 \\ (8 - q)^2 + (12 - 2q)^2 &= 61 \\ 5q^2 - 64q + 147 &= 0 \\ q_1 &= \frac{49}{5}, \quad q_2 = 3 \end{aligned}$$

skalární součin, vektorový součin, smíšený součin

- 1) Určete souřadnice bodu Y ležícího na ose y tak, aby $|\angle ABY| = 120^\circ$, jestliže $A[5; 2; 10]$, $B[1; 2; 7]$.

Řešení: Pro vektory $\vec{BA} = (4; 0; 3)$, $\vec{BY} = (-1; y - 2; -7)$, kde $Y[0; y; 0]$, platí:

$$\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BY}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BY}\|} = \cos 120^\circ.$$

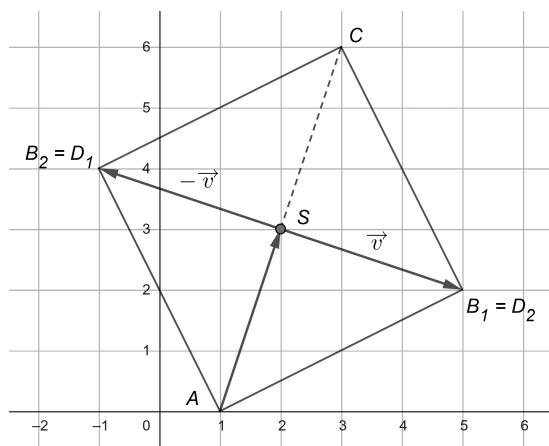
Po dosazení souřadnic vektorů a úpravě získáme

$$y^2 - 4y - 46 = 0,$$

odkud $y \in \{2 \pm 5\sqrt{2}\}$, tedy $Y_1 = [0; 2 + 5\sqrt{2}; 0]$, $Y_2 = [0; 2 - 5\sqrt{2}; 0]$.

- 2) Jsou dány body $A[1; 0]$, $C[3; 6]$. Určete souřadnice bodů B , D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec.

Řešení: Označme S střed čtverce. Pro vektory $\vec{SB}$, $\vec{SD}$ platí, že jsou navzájem opačné, mají stejnou velikost jako vektor $\vec{AS}$ a jsou k tomuto vektoru kolmé. Existují dva čtverce $ABCD$ lišící se pouze orientací popisu vrcholů, dále tedy rozlišujeme čtverec AB_1CD_1 a AB_2CD_2 , přičemž $B_{1,2} = D_{2,1} = S \pm \vec{v}$, kde $\vec{v}$ je libovolný vektor kolmý k $\vec{AS}$ takový, že $\|\vec{v}\| = \|\vec{AS}\|$.



$S = [2; 3]$, $\vec{AS} = (1; 3)$, pro $\vec{v} = (3; -1)$ (druhou možností je uvažovat $\vec{v} = (-3; 1)$) je $B_1 = D_2 = [5; 2]$ a $B_2 = D_1 = [-1; 4]$.

- 3) Vypočítejte dvěma různými způsoby (ale bez užití rovnice přímky) obsah trojúhelníku ABC , jestliže $A[4; 7]$, $B[-7; 4]$, $C[0; -1]$.

Řešení – první způsob: Z daných údajů lze vypočítat délky jednotlivých stran trojúhelníku a následně využít Hérónův vzorec.

$$a = |BC| = \sqrt{(0+7)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{74}$$

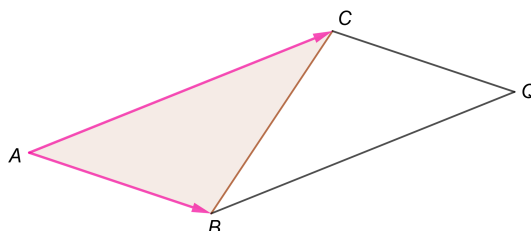
$$b = |AC| = \sqrt{(0-4)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{80}$$

$$c = |AB| = \sqrt{(-7-4)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{130}$$

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$, po dosazení a úpravě (která je mimochodem pěkným cvičením na úpravu číselných výrazů s odmocninami) vyjde $S = 38$.

Řešení – druhý způsob: Búno můžeme trojúhelník umístit v prostoru do roviny $z = 0$, tj. $A[4; 7; 0]$, $B[-7; 4; 0]$, $C[0; -1; 0]$. Následně vypočteme vektorový součin vektorů $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ a využijeme toho, že jeho velikost je obsahem rovnoběžníku $ABQC$ (viz obr.). Pro hledaný obsah tedy platí:

$$S = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \frac{\|(-11; -3; 0) \times (-4; -8; 0)\|}{2} = \frac{\|(0; 0; 76)\|}{2} = \frac{76}{2} = 38.$$



- 4) Určete objem rovnoběžnostěnu $ABCD A'B'C'D'$ z první úlohy tohoto souboru.

Řešení: Objem rovnoběžnostěnu je roven absolutní hodnotě smíšeného součinu tří vektorů, které rovnoběžnostěn jednoznačně určují, v případě rovnoběžnostěnu $ABCD A'B'C'D'$ tedy uvažujeme např. vektory $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA'}$.

$$V = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AA'}| = |[(1; -1; 1) \times (2; 5; -4)] \cdot (3; 6; 3)| = |(-1; 6; 7) \cdot (3; 6; 3)| = 54$$

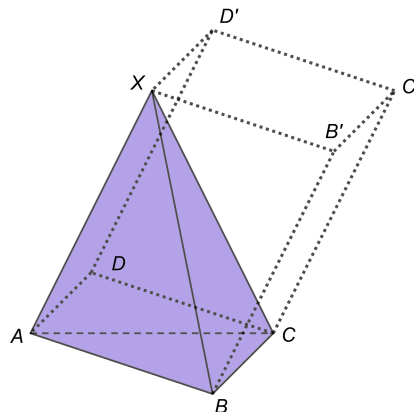
- 5) Určete souřadnice bodu X ležícího na ose x tak, aby objem čtyřstěnu $ABCX$, kde $A[1; -3; 2]$, $B[3; 0; 1]$, $C[-1; 1; 3]$, byl 21.

Řešení: Označme x x -ovou souřadnici bodu X , tedy $X = [x; 0; 0]$. Objem čtyřstěnu $ABCX$ je jednou šestinou objemu rovnoběžnostěnu $ABCDXB'C'D'$ (viz obr.), jelikož objem čtyřbokého jehlanu je třetinou objemu hranolu s touž podstavou a čtyřstěn můžeme vnímat jako trojboký jehlan, tj. jehlan s poloviční podstavou oproti příslušnému čtyřbokému jehlanu. Platí tedy:

$$\frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AX}| = 21$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2; 3; -1), \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-4; 1; 2), \\ \overrightarrow{AX} &= (x-1; 3; -2) \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě získáme $18 = |x-5|$,
odkud $x_1 = 23$, $x_2 = -13$,
tj. $X_1 = [23; 0; 0]$, $X_2 = [-13; 0; 0]$.



přímka v rovině

- 1) Jsou dány body $A[4; 7]$, $B[-7; 4]$, $C[0; -1]$. Zapište:
- parametrické vyjádření těžnice t_a trojúhelníku ABC ,
 - parametrické vyjádření polopřímky CB ,
 - parametrické vyjádření výšky v_c trojúhelníku ABC .

Řešení (a): Těžnice t_a je úsečka s krajními body A a S_{BC} , kde S_{BC} je střed strany BC .

$$S_{BC} = \left[-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right], \quad \overrightarrow{AS_{BC}} = \left(-\frac{15}{2}; -\frac{11}{2}\right)$$

Parametrické vyjádření této těžnice můžeme napsat např. následovně:

$$t_a = \{[A + t \cdot \overrightarrow{AS_{BC}}]; t \in \langle 0; 1 \rangle\} = \left\{ \left[[4; 7] + t \cdot \left(-\frac{15}{2}; -\frac{11}{2}\right) \right]; t \in \langle 0; 1 \rangle \right\},$$

pro jednotlivé souřadnice bodů těžnice t_a pak platí

$$\begin{aligned} x &= 4 - \frac{15}{2}t, \\ y &= 7 - \frac{11}{2}t; \quad t \in \langle 0; 1 \rangle. \end{aligned}$$

Pokud bychom namísto vektoru $\overrightarrow{AS_{BC}} = \left(-\frac{15}{2}; -\frac{11}{2}\right)$ uvažovali např. nabízející se lineárně závislý vektor $(15; 11)$, museli bychom adekvátně upravit mezní hodnoty parametru t , tj. v tomto případě $t \in \left\langle 0; -\frac{1}{2} \right\rangle$.

Řešení (b): Pro parametrické vyjádření polopřímky je nejsnazší uvažovat její počáteční bod a k němu přičítat nezáporné násobky libovolného směrového vektoru orientovaného stejně jako je orientace dané polopřímky. Zde tedy:

$$\rightarrow CB = \{[C + t \cdot \overrightarrow{CB}]; t \in \langle 0; \infty \rangle\} = \{[[0; -1] + t \cdot (-7; 5)]; t \in \langle 0; \infty \rangle\},$$

pro jednotlivé souřadnice bodů polopřímky CB pak platí

$$\begin{aligned}x &= -7t, \\y &= -1 + 5t; \quad t \in \langle 0; \infty \rangle.\end{aligned}$$

Řešení (c): Výškou v_c trojúhelníku ABC rozumíme přímkou¹ vedenou bodem C kolmo k přímce AB . Směrovým vektorem této výšky bude libovolný vektor kolmý k vektoru $\overrightarrow{AB}$, tj. libovolný vektor $\vec{s}$, pro který platí $\vec{s} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AB} = (-11; -3)$, například $\vec{s} = (3; -11)$

Parametrické vyjádření výšky můžeme zapsat následovně:

$$v_c = \{[C + t \cdot \vec{s}], t \in \mathbb{R}\} = \{[[0; -1] + t \cdot (3; -11)], t \in \mathbb{R}\},$$

pro jednotlivé souřadnice bodů výšky v_c pak platí

$$\begin{aligned}x &= 3t, \\y &= -1 - 11t; \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- 2) Určete vzájemnou polohu přímek p, q . Jsou-li různoběžné, vypočítejte souřadnice jejich průsečíku a jejich odchylku. Jsou-li rovnoběžné, určete jejich vzdálenost.

a) $p: 5x - 2y + 6 = 0$

$q: x = -1 + 3t, y = 4 + 4t, t \in \mathbb{R}$

b) $p: 5x - 12y + 10 = 0$

$q: x - 2,4y - 4,5 = 0$

Přímky v rovině mohou být různoběžné nebo rovnoběžné. V případě rovnoběžných přímek ještě rozlišujeme, zda jsou, či nejsou totožné. O ne/rovnoběžnosti přímek rozhodneme na základě jejich směrových, popřípadě normálových vektorů. Přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, jsou-li jejich směrové (normálové) vektory lineárně závislé.

Řešení (a): Normálový vektor $\vec{n}_p$ přímky p má souřadnice $(5; -2)$. Směrový vektor $\vec{s}_q$ přímky q má souřadnice $(3; 4)$, tj. normálový vektor $\vec{n}_q$ přímky q může mít např. souřadnice $(4; -3)$ (musí platit, že $\vec{n}_q \cdot \vec{s}_q = 0$). Vektory $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ jsou lineárně nezávislé, tedy přímky p, q jsou různoběžné.

Souřadnice průsečíku R přímek p, q musí vyhovovat všem rovnicím popisujícím dané přímky, tedy hledáme $R[x; y]$ tak, aby $5x - 2y + 6 = 0$, $x = -1 + 3t$ a zároveň $y = 4 + 4t$. Nejsnazší je dosadit z parametrického vyjádření přímky q do rovnice přímky p , tedy

$$5(-1 + 3t) - 2(4 + 4t) + 6 = 0,$$

odkud $t = 1$, a tedy $R[2; 8]$.

Pro odchylku φ daných přímek platí:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q|}{\|\vec{s}_p\| \cdot \|\vec{s}_q\|}, \text{ resp. } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{\|\vec{n}_p\| \cdot \|\vec{n}_q\|}.$$

Po dosazení do druhého z uvedených vztahů a úpravě získáváme $\cos \varphi = \frac{26}{5\sqrt{29}}$, tj. $\varphi \doteq 15^\circ 04'$.

¹Pojem *výška trojúhelníku* může být chápán také jako úsečka či číslo (Moravcová, V. & Hromadová, J.: *Základy planimetrie pro učitelské studium*, Matfyzpress, 2021), pokud bychom však zde vnímali výšku jako úsečku, její umístění by bylo třeba v zadání přesněji specifikovat.

Řešení (b): Normálové vektory $\vec{n}_p = (5; -12)$, $\vec{n}_q = (1; -2, 4)$ jsou lineárně závislé, neboť $\vec{n}_p = 5\vec{n}_q$. Přímky p, q jsou tedy rovnoběžné. Vzdálenost přímek je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z nich od druhé přímky. Uvažujme např. bod $P[10; 5]$, který náleží přímce p , a určíme $|Pq|$. Před výpočtem vzdálenosti je vhodné upravit rovnici přímky q , vynásobíme ji 10, abychom se zbavili desetinných čísel, tedy dále pracujeme s rovnicí $10x - 24y - 45 = 0$.

Pro vzdálenost přímek p, q platí:

$$|pq| = |Pq| = \frac{|10 \cdot 10 - 24 \cdot 5 - 45|}{\sqrt{10^2 + (-24)^2}} = \frac{65}{26} = \frac{5}{2}.$$

- 3) Dokažte, že výšky trojúhelníku náleží jednomu svazku přímek.

Řešení: Obecný trojúhelník ABC vhodně umístíme do kartézské soustavy souřadnic, zapíšeme rovnice jednotlivých výšek, vyjádříme souřadnice průsečíku V dvou z těchto výšek a ověříme, že leží také na výšce třetí.

Nechť BÚNO $A[0; 0]$, $B[b_x; 0]$, $C[c_x; c_y]$. Potom $\vec{BC} = (c_x - b_x; c_y)$ je normálový vektor výšky v_a na stranu BC , $\vec{AC} = (c_x; c_y)$ je normálový vektor výšky v_b na stranu AC a $\vec{AB} = (b_x; 0)$ je normálový vektor výšky v_c na stranu AB .

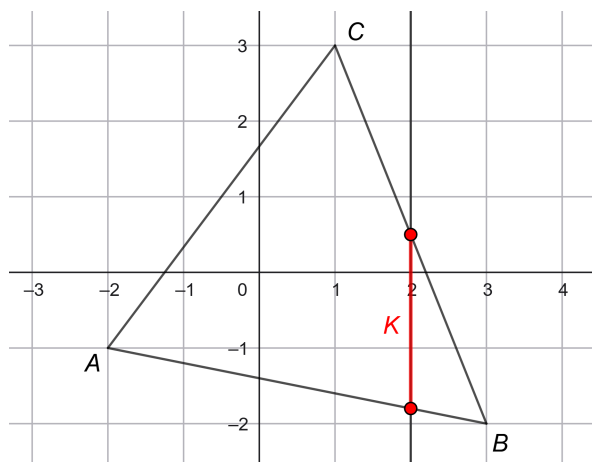
Výška v_a prochází bodem $A[0; 0]$, její obecnou rovnicí je tedy $(c_x - b_x)x + c_y y = 0$. Výška v_b prochází bodem $B[b_x; 0]$, její obecnou rovnicí je tedy $c_x x + c_y y - c_x b_x = 0$. Výška v_c procházející bodem $C[c_x; c_y]$ má obecnou rovnici $x - c_x = 0$.

Bod V určíme například jako průsečík výšek v_b, v_c . Z rovnice výšky v_c víme, že $x = c_x$. Dosazením do rovnice v_b za x a úpravou získáme $y = \frac{c_x(b_x - c_x)}{c_y}$, tj. $V = \left[c_x; \frac{c_x(b_x - c_x)}{c_y} \right]$.

Dosazením souřadnic bodu V za x, y do rovnice přímky v_a ověříme, že bod $V \in v_a$ (vyjde $0 = 0$), tj. všechny výšky náleží témuž svazku se středem V .

- 4) Pro jaké hodnoty reálného parametru k náleží bod $K[2; k]$ trojúhelníku $A[-2; -1]$, $B[3; -2]$, $C[1; 3]$?

Řešení: Bod K náleží přímce, jejíž rovnice je $x = 2$ (jedná se o rovnoběžku s osou y). Pro vymezení hodnot parametru k je třeba nalézt y -ové souřadnice průsečíků této přímky se stranami AB, BC trojúhelníku ABC (viz obr.).



Obecná rovnice přímky AB je $x + 5y + 7 = 0$, obecná rovnice přímky BC je $5x + 2y - 11 = 0$.

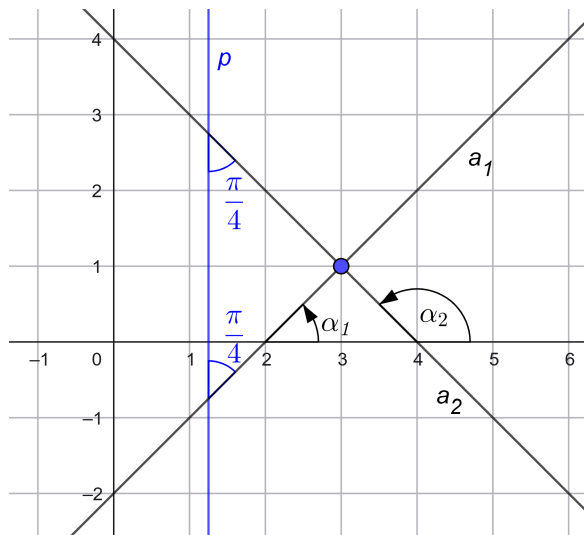
Bod přímky AB s x -ovou souřadnicí rovnou 2 je $\left[2; -\frac{9}{5} \right]$, na přímce BC je hledaný mezní bod $\left[2; \frac{1}{2} \right]$. Tedy $k \in \left\langle -\frac{9}{5}; \frac{1}{2} \right\rangle$.

- 5) Bodem $A[3; 1]$ veďte přímku a , jejíž odchylka od přímky $p: 4x - 5 = 0$ je rovna $\frac{\pi}{4}$.

Řešení: Přímka p je rovnoběžná s osou y . Z obrázku je patrné, že odchylka α hledané přímky od kladné poloosy x bude $\frac{\pi}{4}$ nebo $\frac{3\pi}{4}$. Využijeme směrnicový tvar obecné rovnice přímky, tj. $y = kx + q$, kde směrnice k je rovna $\tan \alpha$.

Pro $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ je $k_1 = 1$, dosazením souřadnic bodu A do rovnice přímky získáme $q = -2$, tj. $y = x - 2$.

Pro $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ je $k_2 = -1$, dosazením souřadnic bodu A do rovnice přímky získáme $q = 4$, tj. $y = -x + 4$.



přímka a rovina v prostoru

- 1) Napište obecnou rovnici roviny, v níž leží body $A[2; 5; -1]$, $B[3; 0; 4]$ a je rovnoběžná s přímkou $p = \{[5 - t; 3 + 2t; -4 - t]; t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení: Vektor $\overrightarrow{AB} = (1; -5; 5)$ a směrový vektor $\vec{s}_p = (-1; 2; -1)$ přímky p jsou směrovými vektory roviny, jejíž rovnici hledáme. Potřebujeme normálový vektor $\vec{n}$, který získáme jako vektorový součin vektorů $\vec{s}_p$, $\overrightarrow{AB}$. Vyjde $\vec{n} = (5; 4; 3)$, tedy obecná rovnice roviny bude mít podobu $5x + 4y + 3z + d = 0$. Hodnotu koeficientu d určíme dosazením souřadnic bodu A nebo B , vyjde $d = -27$, tedy obecná rovnice roviny je $5x + 4y + 3z - 27 = 0$.

- 2) Určete vzájemnou polohu rovin α a β , jestliže $\alpha: 2x - 5y - 4z - 10 = 0$, $\beta: x - y + z - 2 = 0$. Jsou-li roviny různoběžné, zapište parametrické vyjádření jejich průsečnice.

Řešení: Normálové vektory $\vec{n}_\alpha = (2; -5; -4)$, $\vec{n}_\beta = (1; -1; 1)$ daných rovin jsou lineárně nezávislé, tedy roviny jsou různoběžné. Jejich průsečnicí je přímka, jejíž parametrické vyjádření získáme řešením soustavy rovnic $2x - 5y - 4z - 10 = 0$, $x - y + z - 2 = 0$. Doporučujeme postupovat tak, že jednu z proměnných x , y , z položíme rovnou parametru (zde $z = t$) a zbývající proměnné vyjádříme v závislosti na tomto parametru.

Parametrické vyjádření průsečnice můžeme zapsat například ve tvaru:

$$\begin{aligned} x &= -3t, \\ y &= -2t - 2, \\ z &= t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 3) V závislosti na hodnotě $a \in \mathbb{R}$ diskutujte vzájemnou polohu přímky AB , kde $A[3; -1; a]$, $B[2; 1; 3]$ a roviny $\varrho: 2x - 3y + z - 7 = 0$.

Řešení: Přímka AB je rovnoběžná s rovinou ϱ právě tehdy, je-li směrový vektor $\vec{s}$ přímky AB kolmý k normálovému vektoru $\vec{n}$ roviny ϱ .

Pro zmíněné vektory platí: $\vec{s} = (-1; 2; 3 - a)$, $\vec{n} = (2; -3; 1)$.

Vektory jsou kolmé právě tehdy, je-li jejich skalární součin roven 0, tedy:

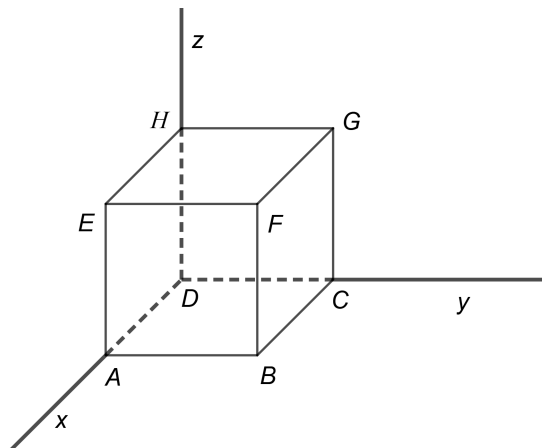
$$-1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (3 - a) \cdot 1 = 0,$$

odkud $a = -5$.

Tj. pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ je přímka AB s rovinou ϱ různoběžná, pro $a = -5$ je přímka AB s rovinou ϱ rovnoběžná (a neleží v ní, neboť např. souřadnice bodu B nevyhovují rovnici roviny ϱ).

- 4) Dokažte, že roviny AFH , CGE určené vrcholy krychle $ABCDEFGH$ jsou navzájem kolmé.

Řešení: Krychli (BÚNO uvažujme s hranou délky 1) umístíme vhodně do kartézské soustavy souřadnic např. tak, jak je vidět na obrázku. Potom $A = [1; 0; 0]$, $F = [1; 1; 1]$, $H = [0; 0; 1]$, tedy $\vec{AF} = (0; 1; 1)$, $\vec{AH} = (-1; 0; 1)$ a pro normálový vektor $\vec{n}_1$ roviny AFH platí $\vec{n}_1 = (1; -1; 1)$. Dále je $C = [0; 1; 0]$, $G = [0; 1; 1]$, $E = [1; 0; 1]$, tedy $\vec{CG} = (0; 0; 1)$, $\vec{CE} = (1; -1; 1)$ a pro normálový vektor $\vec{n}_2$ roviny CGE platí $\vec{n}_2 = (1; 1; 0)$.



Dvě roviny jsou kolmé právě tehdy, jsou-li kolmé jejich normálové vektory, což nastane právě tehdy, je-li jejich skalární součin roven 0. Jelikož $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$, jsou dané roviny navzájem kolmé.

- 5) Vypočítejte odchylku přímky $q = \{[-1 - 3t; -5 - t; -2t]; t \in \mathbb{R}\}$ od roviny α zadané obecnou rovnicí $x - 2y + 3z - 4 = 0$.

Řešení: Pro odchylku φ' přímky od normály roviny platí

$$\cos \varphi' = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{s}\| \cdot \|\vec{n}\|},$$

kde $\vec{s}$ je směrový vektor přímky a $\vec{n}$ je normálový vektor roviny.

jelikož pro odchylku φ přímky a roviny platí $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$, je $\cos \varphi' = \sin \varphi$, a tedy

$$\sin \varphi = \frac{|(-3; -1; -2) \cdot (1; -2; 3)|}{\|(-3; -1; -2)\| \cdot \|(1; -2; 3)\|} = \frac{|-3 + 2 - 6|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2},$$

odkud $\varphi = 30^\circ$.