SHODNÁ ZOBRAZENÍ, STEJNOLEHLOST, KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

VÝSLEDKY a NÁVODY

Shodná zobrazení a jejich využití:

(1) Přímo shodné obrazce lze přemístit tak, že se kryjí, aniž bychom je „vyjmuli“ z roviny, nepřímo shodné obrazce takto přemístit nelze. Přímé shodnosti: identita, středová souměrnost, otočení (rotace), posunutí (translace). Nepřímé shodnosti: osová souměrnost, posunutá osová souměrnost.

(2) Pro osy o_1, o_2 osových souměrností platí:
a) $o_1 \parallel o_2 \wedge o_1 \neq o_2$.
b) o_1, o_2 jsou různoběžné.
c) $o_1 \perp o_2$.
d) $o_1 = o_2$.

(3) Jelikož libovolný obrazec lze rozložit na trojúhelníky, stačí ukázat platnost tvrzení pro trojúhelník. Zvolíme obecný trojúhelník ABC a sestrojíme s ním shodný trojúhelník $A'B'C'$. Osu o_1 první osové souměrnosti volíme jako osu úsečky AA', v této osové souměrnosti se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B_1C_1$. Osu o_2 druhé osové souměrnosti volíme jako osu úsečky B_1B' (přičemž $A' \in o_2$, jelikož trojúhelník $B_1B'A'$ je rovnoramenný se základnou B_1B'), v této osové souměrnosti se trojúhelník $A'B_1C_1$ zobrazí na trojúhelník $A'B'C_2$. Jsou-li trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ přímo shodné, tak $C_2 = C'$. V opačném případě užijeme ještě třetí osovou souměrnost s osou o_3, kterou volíme jako osu úsečky C_2C'.

(4) Nejprve sestrojíme trojúhelník C_1C_2C, pro nějž platí: $|C_1C_2| = a + b + c$, $|\sphericalangle C_2C_1C| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle C_1C_2C| = \frac{\beta}{2}$. Body A, B jsou pak průsečíky os o_1, o_2 stran C_1C, C_2C se stranou C_1C_2. Úloha má jedno řešení.

(5) Nejprve sestrojíme trojúhelník $BB'C$, pro nějž platí: $|B'C| = b + c$, $|\sphericalangle CB'B| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle B'CB| = 180° - (\alpha + \beta)$. Bod A je pak průsečíkem osy úsečky BB' se stranou $B'C$. Úloha má jedno řešení.

(6) Jedná se o polohovou úlohu, musíme začít úsečkou BS! Dále užijeme středovou souměrnost se středem S, v níž se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $CB'A$. Sestrojíme tedy bod B' a bod A nalezneme jako průsečík kružnice se středem B' a poloměrem a s množinou bodů, z nichž je úsečka BS vidět pod úhlem α. Úloha může mít 2, 1 nebo žádné řešení.

(7) V osové souměrnosti s osou p zobrazíme bod A na bod A'. Bod C je pak průsečíkem $A'B$ s přímkou p.

(8) Paty kolmic vedených ze středů daných kružnic k přímce p označíme X, Y. Poté posuneme jednu z kružnic o vektor $\overrightarrow{XY}$ (resp. $\overrightarrow{YX}$). Přímka q je určena průsečíky posunuté kružnice s druhou (neposunutou) kružnicí.

(9) Bod A musí být zadán uvnitř rovinného pásu určeného rovnoběžkami p_1, p_2, jinak úloha nemá řešení. Poloměr r hledané kružnice je roven polovině vzdálenosti rovnoběžek p_1, p_2. Střed kružnice leží na ose rovinného pásu a zároveň na kružnici se středem v bodě A a poloměrem r. Úlohu lze též řešit tak, že sestrojíme libovolnou kružnici se středem na ose pásu, která se dotýká přímek p_1, p_2, a tu pak posuneme rovnoběžně s p_1 tak, aby procházela bodem A.

(10) V otočení se středem A a úhlem $60°$ (resp. $-60°$) zobrazíme čtverec $KLMN$ na čtverec $K'L'M'N'$. Vrcholy hledaného trojúhelníku jsou průsečíky obvodu čtverce $KLMN$ s obvodem čtverce $K'L'M'N'$. Úloha má dvě řešení.

Podobnost, stejnolehlost:

(1) $S_{ABQ} = 2$, $S_{ADQ} = 4$, $S_{DCSQ} = 5$.

(2) Hledaný poměr je $4:15$.

(3) Hledaný poměr je $2\sqrt{6}:3$.

(4) Sestrojíme libovolnou kružnici, která se dotýká ramen úhlu (tj., má střed na ose úhlu) a zmenšíme/zvětšíme ji ve stejnolehlosti se středem V tak, aby procházela bodem M. (Např. označíme-li bod dotyku pomocné kružnice s ramenem VA jako T_1 a průsečík pomocné kružnice s osou úhlu jako M_1, pak $M_1T_1 \parallel MT$, kde T je bod dotyku hledané kružnice.) Úloha má dvě řešení.

(5) Sestrojíme libovolný čtverec $K'L'M'N'$ tak, že $K'L' \subset AB$ a O je střed $K'L'$, přičemž O značí střed AB. Tento čtverec zvětšíme/zmenšíme ve stejnolehlosti se středem O.

(6) Užijeme stejnolehlost se středem M a koeficientem $\frac{1}{2}$. V této stejnolehlosti zobrazíme kružnici k na kružnici k'. Bod X je průsečíkem k a k'. Úloha má dvě řešení.

(7) Počet tečen (0, 1, 2, 3, 4, ∞) závisí na vzájemné poloze kružnic. Pokud mají dvě kružnice společnou právě jednu až čtyři tečny, pak tyto tečny prochází středem/středy stejnolehlosti, v nichž se jedna kružnice zobrazí na druhou.

(8) Sestrojíme libovolný trojúhelník $A'B'C'$, který má délky stran v poměru $4:3:5$. Dále sestrojíme kružnici opsanou, její střed označíme S, a kružnici $k(S, 4\,\text{cm})$. Ve stejnolehlosti se středem S trojúhelník $A'B'C'$ zvětšíme/zmenšíme tak, aby jeho opsanou kružnicí byla kružnice k.

(9) Sestrojíme libovolný trojúhelník ABM tak, že $A \in a$, $B \in b$. Dále sestrojíme libovolný trojúhelník $A'B'M'$ tak, aby $A' \in a$, $B' \in b$, $AB \parallel A'B'$, $AM \parallel A'M'$, $BM \parallel B'M'$. Hledanou přímkou je přímka MM'. (Využíváme vlastně stejnolehlost se středem P.)

(10) Zvolíme libovolnou stejnolehlost (střed S a koeficient λ) a zobrazíme zadané útvary (ramena VA, VB) na polopřímky $V'A'$, $V'B'$. Stejnolehlost je třeba zvolit takovou, aby se obraz bodu V (tedy průsečík zobrazených ramen) vešel na papír. Sestrojíme osu úhlu $A'V'B'$ a tu zobrazíme ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\frac{1}{\lambda}$.