PLANIMETRIE, MNOŽINY BODŮ DANÉ VLASTNOSTI

VÝSLEDKY a NÁVODY

Úlohy z jiných oblastí s planimetrickou tematikou:

(1) a) $n-1$; b) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; c) $\dfrac{n^2+n+2}{2}$.
Návod: a) Úlohu řešíme úvahou. b) Užijeme kombinatorické pravidlo součinu. c) Užijeme posloupnosti a jejich součty.

(2) $|AK| = \dfrac{65}{17}$ cm, $|BK| = \dfrac{156}{17}$ cm.
Návod: Lze řešit pomocí analytické geometrie nebo užitím trigonometrických vztahů.

Planimetrie – výpočty, důkazy:

(1) Návod: Pro bod C musí platit: $|AC| : |CB| = |AB| : |AC| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) Poloměr kružnice m je 8 cm.
Návod: Lze užít Pýthagorovu větu na trojúhelník s vrcholy ve středech kružnic k, l_1, m (resp. k, l_2, m).

(3) Součet délek kružnic je 2π (tento součet nezávisí na volbě tětivy).
Návod: Součet průměrů vepsaných kružnic je roven průměru jednotkové kružnice.

(4) $(2-\sqrt{3}) : (2+\sqrt{3})$.
Návod: výšku menší úseče vyjádříme jako $1-x$, výšku druhé úseče jako $1+x$, kde x je výška rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna je daná tětiva a hlavní vrchol střed jednotkové kružnice.

(5) Návod: Uvažujeme trojúhelník určený body 1, 8 a průsečíkem spojnic 1,6 a 5,8. Vnitřní úhly tohoto trojúhelníku při vrcholech 1 a 8 dopočteme pomocí vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem příslušným k danému oblouku (30°, 60°), na třetí úhel zbývá 90°.

(6) $3:1$.
Návod: Těžnice rozdělí trojúhelník na šest trojúhelníků stejného obsahu.

(7) $|MD| = \dfrac{|MA| \cdot |MB|}{|MC|}$
Návod: Užijeme mocnost bodu M ke kružnici opsané trojúhelníku ABC.

(8) $\dfrac{b+c-a}{2}$.
Návod: „Délkou tečny“ je myšlena vzdálenost z bodu A k bodu dotyku.

(9) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Návod: V trojúhelníku BCD užijeme Pýthagorovu větu pro výpočet BD, Eukleidovu větu o odvěsně k zjištění úseků, na něž kolmice z bodu C rozdělí úsečku BD, a následně Eukleidovu větu o výšce pro výpočet hledané vzdálenosti.

(10) Návod: Nejprve určíme bod dotyku T kružnice k s přímkou BF pomocí mocnosti bodu B ke kružnici k. Střed S kružnice k je pak průsečíkem osy úsečky AE a kolmice vedené bodem T k přímce BF. Úloha má dvě řešení.

(11) $2:1$.
Návod: Obsah trojúhelníku ADE vyjádříme jako součet obsahů trojúhelníků AEF a DEF, kde F je střed strany AD. Tyto trojúhelníky mají společnou základnu EF o délce $\frac{a+c}{2}$ (tzv. střední příčka lichoběžníku se základnami a, c) a výšku, která je polovinou výšky celého lichoběžníku.

(12) $9\,\text{cm}^2$, $6\,\text{cm}^2$, $6\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$.
Návod: Daný lichoběžník označme $ABCD$ ($|AB| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 4\,\text{cm}$) a průsečík úhlopříček P. Užijeme podobnost trojúhelníků ABP a CDP (podle věty *uu*) a shodnost obsahů trojúhelníků ABC a ABD.

(13) $7\,\text{cm}$, $1\,\text{cm}$.
Návod: Užijeme vlastnost tečnového čtyřúhelníku (součet délek protějších stran je shodný).

(14) $20\,\text{cm}^2$.
Návod: Užijeme vlastnost tečnového čtyřúhelníku (součet délek protějších stran je shodný).

(15) $b = a\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$,
Návod: Body L, M dělí strany BC, DC ve stejném poměru (obrázek je osově souměrný podle úhlopříčky AC). Užijeme soustavu dvou rovnic – Pýthagorovu větu pro trojúhelník LMC a Pýthagorovu větu pro trojúhelník ABL.

(16) $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 2\sqrt{13}\,\text{cm}$, $r = \sqrt{13}$.
Návod: Užijeme soustavu dvou rovnic – Pýthagorovu větu pro trojúhelník $AS_{BC}C$ a Pýthagorovu větu pro trojúhelník $BS_{AC}C$, kde S_{BC} značí střed strany BC, S_{AC} značí střed strany AC. Střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku leží ve středu přepony.

(17) $R\left(\sqrt{2} - 1\right)$
Návod: Vyjádřete vzdálenost středu čtvrtkruhu a středu vepsaného kruhu dvěma způsoby (jako rozdíl poloměrů a jako úhlopříčku čtverce) a dejte je do rovnosti.

Planimetrie – konstrukce:

(1) Návod: Začneme stranou AB. Bod C je průsečíkem rovnoběžky s AB ve vzdálenosti v_c a množiny bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem $60°$ (touto množinou je sjednocení dvou kružnicových oblouků AB, jejichž středy O_1, O_2 leží na ose úsečky AB tak, aby $|\sphericalangle AO_1B| = |\sphericalangle AO_2B| = 120°$, přičemž ze dvou možných oblouků AB pro každý střed uvažujeme vždy ten delší). Úloha má dvě řešení.

(2) Návod: Trojúhelník ABC doplníme na rovnoramenný trojúhelník XBC s rameny XC, BC ($A \in XC$). Nyní můžeme sestrojit trojúhelník XBA (podle věty *sus*). Bod C je průsečíkem polopřímky XA s osou úsečky XB. Úloha má jedno řešení.

(3) Návod: Nejjednodušší je začít úhlem XCY o velikosti $75°$. Bod A je pak průsečíkem ramene CX s přímkou vedenou rovnoběžně s ramenem CY ve vzdálenosti v_a, podobně bod B. Úloha má jedno řešení.

(4) Návod: Pozor, úloha je tzv. *polohová* – při konstrukci musíme začít úsečkou AS (i kdyby jiný postup byl jednodušší). Počítají se všechna řešení, která lze k úsečce AS přirýsovat (tedy i pokud jsou navzájem shodná). Na úsečce AS sestrojíme těžiště T tak, aby $|AT| : |TS| = 2 : 1$. Bod B je průsečíkem množiny bodů, z nichž je úsečka AS vidět pod úhlem $60°$, a kružnice se středem T a poloměrem $\frac{2}{3}t_b$. Úloha má čtyři řešení.

(5) Návod: Lichoběžník rozdělíme rovnoběžkou se stranou AD procházející bodem C na rovnoběžník a trojúhelník, který lze sestrojit podle věty *sss*.

Množiny bodů dané vlastnosti:

(1) a) Množinou je přímka procházející bodem T kolmo k přímce p vyjma bodu T. b) Množinou je přímka ST vyjma bodů S, T.

(2) Na přímce p sestrojíme úsečku AB délky m a v každé polorovině určené přímkou p zkonstruujeme bod C (C_1, C_2) tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný s rameny délky r. Řešením jsou rovnoběžky s přímkou p vedené body C_1, C_2. Pro $m < 2r$ jsou řešením dvě různé rovnoběžky s přímkou p. Pro $m = 2r$ je řešením přímka p. Pro $m > 2r$ úloha nemá řešení.

(3) Sestrojíme Thalétovu kružnici τ nad úsečkou AB. a) Množinou jsou body vnitřní oblasti kružnice τ vyjma úsečky AB. Lze připustit, že do řešení patří i body na přímce AB, vyjma vnitřních bodů úsečky AB, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem $0°$. b) Množinou je kružnice τ vyjma bodů AB. c) Množinou je vnější oblast kružnice τ vyjma přímky AB. Lze připustit, že do řešení patří i vnitřní body úsečky AB, z nichž je úsečka vidět pod úhlem $180°$.

(4) Návod: Sestrojte Thalétovy kružnice nad všemi stranami trojúhelníka.

(5) Středy všech požadovaných kružnic tvoří dvě soustředné kružnice m_1, m_2 se středem O a s poloměry 3,5 cm a 1,5 cm. Na kružnici m_1 leží středy kružnic s poloměrem 1,5 cm, na kružnici m_2 leží středy kružnic s poloměrem 3,5 cm.

(6) Množinou je Thalétova kružnice nad AB vyjma bodů A, B.