

METODY ŘEŠENÍ ÚLOH

Logické myšlení v matematice

DVA ZÁKLADNÍ MYŠLENKOVÉ POCHODY

- **Induktivní postup**

- od jednoduchého ke složitému
- od konkrétního k abstraktnímu
- žák pozoruje konkrétní případy, hledá pravidelnost a formuluje obecné tvrzení

- **Deduktivní postup**

- od složitého k elementárnímu
 - od abstraktního ke konkrétnímu
 - žák vychází z definic, známých vět či předpokladů a z nich odvozuje konkrétní závěr
-

INDUKTIVNÍ METODY V MATEMATICE

1. Úplná indukce

- pro konečné (malé) množiny
- objevíme společnou vlastnost všech prvků a poté vyslovíme obecný výrok pravdivý pro danou množinu objektů

Příklad: Zkoumejte počty vrcholů, hran a stěn krychle, pravidelného čtyřstěnu, pravidelného osmistěnu, pětibokého jehlanu a šestibokého hranolu. Najděte vztah mezi počty jejich vrcholů, hran a stěn.

INDUKTIVNÍ METODY V MATEMATICE

2. Analogie

- na základě obecných vět o objektech jedné třídy vyslovujeme obecná (zatím nedokázaná) tvrzení o prvcích jiné třídy
- mezi prvky jednotlivých tříd/množin musí být určitá podobnost (například přechod z roviny do prostoru, z přirozených čísel na celá/racionální čísla apod.)
- nebezpečné, může vést k vyslovení neplatných tvrzení

Příklad: Zformulujte analogické věty o čtyřstěnech k následujícím větám o trojúhelnících a posuďte jejich platnost.

- I. Každému trojúhelníku lze opsat i vepsat kružnici.
 - II. V každém trojúhelníku se těžnice protínají v jednom bodě.
 - III. V každém trojúhelníku se výšky protínají v jednom bodě.
-

INDUKTIVNÍ METODY V MATEMATICE

3. Zobecňování

- rozšíření pojmů a poznatků na větší třídu/množinu (např. pojem mnohoúhelník je zobecněním trojúhelníku, čtyřúhelníku, ...)
- nebezpečné, může vést k vyslovení neplatných tvrzení

Příklad: Zobecněte Pýthagorovu větu.

INDUKTIVNÍ METODY V MATEMATICE

4. Neúplná indukce

- vyslovení hypotézy (bez užití analogie či zobecňování) na základě prozkoumání několika prvků dané třídy a objevení jisté společné vlastnosti
- následně je třeba novou hypotézu dokázat (tj. stane se novou větou deduktivního systému), nebo vyvrátit (tj. její negace se stane novou větou deduktivního systému)

Příklad: Podíváme-li se na hodnoty výrazu $n^2 + n + 11$ pro $n = 1, 2, \dots, 9$, můžeme vyslovit hypotézu, že pro každé přirozené n je hodnotou daného výrazu liché číslo. Dále můžeme vyslovit hypotézu, že hodnotou výrazu je pro každé přirozené n prvočíslo. Každou z hypotéz dokažte, nebo vyvráťte.

DEDUKTIVNÍ METODY V MATEMATICE

- **důkazy**
 - přímý
 - nepřímý
 - sporem
 - matematickou indukcí
- užití pravidla **modus ponens** (pravidlo odloučení)

$A, A \Rightarrow B$

$\therefore B$

DEDUKTIVNÍ METODY V MATEMATICE

Důkaz přímý

- sestrojení řetězce implikací
- pokud již věta je ve tvaru implikace, známe začátek a konec řetězce
- pokud neznáme začátek řetězce, musíme jej najít – tato fáze se nazývá *rozbor*

Důkaz nepřímý

- pro věty ve tvaru implikace, dokazujeme obměněnou implikaci

Důkaz sporem

- dokazujeme, že neplatí negace původního výroku

Důkaz matematickou indukcí

- ověření pro „první krok“, indukční předpoklad, indukční krok
-

DEDUKTIVNÍ METODY V MATEMATICE

Příklady

- Dokažte pomocí různých typů důkazů, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: 2 \mid (n^3 - 11n)$.
 - Dokažte, že platí: $\sqrt{7 + \sqrt{7}} \geq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}$.
 - Dokažte, že číslo $\log 7$ je iracionální.
 - Dokažte, že pro každé přirozené n platí: $3 \mid (n^2 + 2) \Rightarrow 3$ nedělí n .
-