

## Komplexní čísla – výsledky

*algebraický tvar (reálná a imaginární část, imaginární jednotka), číslo komplexně sdružené, absolutní hodnota, komplexní jednotka, Gaussova rovina*

**1** Pracujte s komplexními čísly  $z_1, z_2$  v algebraickém tvaru, tj. např.  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ , a ukažte, že se výrazy  $z_1 + z_2$  a  $z_2 + z_1$ , resp.  $z_1 \cdot z_2$  a  $z_2 \cdot z_1$  díky komutativitě sčítání a násobení reálných čísel rovnají. Obdobně pro asociativitu ukážeme, že pro libovolná komplexní čísla  $z_1, z_2, z_3$  platí  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ , resp.  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ .

**2** Uvažujme  $z = a + bi$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $a, b$  nejsou zároveň obě nulová. Potom hledáme  $z'$  takové, že  $(a + bi) \cdot z' = 1$ . Tuto rovnici rozšíříme výrazem  $a - bi$  (tj. číslem komplexně sdruženým s  $z$ ). Po úpravě získáme  $z' = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$ .

**3 a 4** Pracujte s komplexními čísly  $z_1, z_2$  v algebraickém tvaru a ukažte, že se levé a pravé strany daných vztahů po úpravě rovnají.

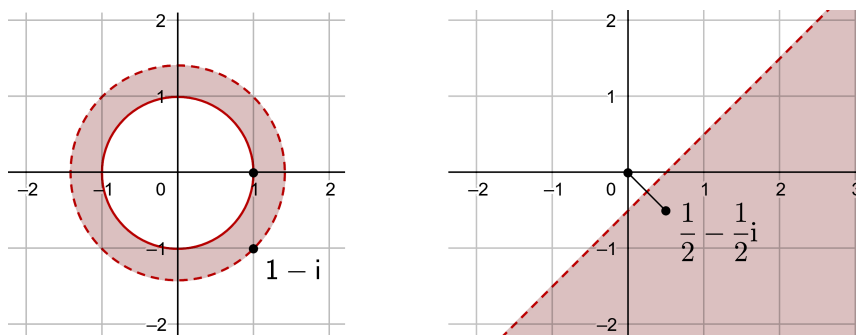
**5** a)  $-i$ ; b)  $-\frac{1}{2}i$ ; c)  $\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$ .

**6** a)  $K = \left\{ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \right\}$ ; b)  $K = \left\{ -\frac{7}{3} + 24i \right\}$ .

**7**  $z = \frac{3}{4}i$ ; pro ryze imaginární číslo v algebraickém tvaru  $a + bi$  platí, že  $a = 0$ .

**8** Pracujte s komplexními čísly  $z_1, z_2$  v algebraickém tvaru a ukažte, že se levá a pravá strana daného vztahu po úpravě rovnají téměř výrazu. Pro  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$  je  $L = P = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ .

**9** a) Řešením je mezikružší bez větší hraniční kružnice. Obě kružnice mají střed v počátku a jejich poloměry jsou 1 a  $\sqrt{2}$ , viz obr. 1 vlevo. b) Řešením je polorovina bez hraniční přímky. Hraniční přímka je osou úsečky, jejímiž krajními body jsou počátek a obraz čísla  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ , viz obr. 1 vpravo.



Obrázek 1

*exponenciální a goniometrický tvar, Moivreova věta*

**10** a)  $1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ; b)  $-6\sqrt{3} + 6i = 12 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ ; c)  $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$ ; d)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$ .

**11** a)  $e^{i\frac{21\pi}{11}}$ ; b)  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

**12** Body  $A, B, C$  lze po řadě reprezentovat jako komplexní čísla  $a = 1 + i$ ,  $b = 2 + i$ ,  $c = 3 + i$ . Hledaný úhel (resp. jeho velikost) je argumentem komplexního čísla, které je součinem čísel  $a, b, c$ . Platí  $a \cdot b \cdot c = 10i = 10 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ , tedy součet velikostí ostrých úhlů  $XOA, XOB, XOC$  je roven  $\frac{\pi}{2}$  (neboli  $90^\circ$ ).

*kvadratická rovnice v  $\mathbb{C}$ , binomická rovnice*

**13** a)  $K = \{1 \pm 3i\}$ ; b)  $K = \{-1 + 3i; 1 - 3i\}$ ; c)  $K = \{3 - i; -4 + 2i\}$ .

**14** Pro kořeny  $x_1, x_2$  dané rovnice platí, že  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ . Po dosazení za  $x_1$ , roznásobení a úpravě tak získáme vztahy  $p = 3 - 2i\sqrt{3} - x_2$  a  $21 = -x_2(3 - 2i\sqrt{3})$ , odkud  $x_2 = -3 - 2i\sqrt{3}$  a  $p = 6$ .

**15** a) Po úpravě získáme binomickou rovnici ve tvaru  $x^3 = \frac{4}{3}$ ,

$$K = \left\{ \sqrt[3]{\frac{4}{3}} (\cos 0 + i \sin 0); \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right); \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \right\};$$

$$\text{b) } K = \left\{ \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right); \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18} \right); \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right); \right. \\ \left. \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18} \right); \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right); \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{35\pi}{18} + i \sin \frac{35\pi}{18} \right) \right\}.$$