

Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

ekvivalentní a důsledkové úpravy; (ne)rovnice lineární, kvadratické, s neznámou ve jmenovateli či v odmocněnci, s absolutní hodnotou

1. Řešte (ne)rovnice v oboru \mathbb{R} :

a) $x^2(11x - 3) < 0$

e) $\sqrt{-x} = 2 - \sqrt{2-x}$

b) $\frac{\frac{1}{2}x - 2}{x - 1} + \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x + 1} \geq 1$

f) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-10} = 2$

c) $2 \leq \frac{x}{x^2 + 1}$

g) $|x - 4| + |2x - 1| = |x| + 3$

d) $x^2 + x(2\sqrt{3} + 1) + 2\sqrt{3} = 0$

h) $\frac{3}{|x - 2|} \leq x$

2. Určete všechny hodnoty reálného absolutního členu q tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $4x^2 - 15x + q = 0$ byl druhou mocninou druhého kořene.

3. Aniž rovnici $-x^2 + 2x + 5 = 0$ řešíte, určete

a) součet převrácených hodnot jejích kořenů,

b) součet druhých mocnin jejích kořenů.

rovnice s parametrem

4. Řešte rovnice s reálným parametrem a v oboru \mathbb{R} :

a) $\frac{2x + a}{x + 1} - \frac{3a}{x - a} = 2$

b) $x \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x + a} \right) = \frac{2}{x + a} - \frac{1}{ax + a^2}$

5. Je dána rovnice $x^2 - (m + 3)x + m - 13 = 0$. Určete všechny hodnoty reálného parametru m tak, aby kořeny dané rovnice byla dvě navzájem převrácená čísla.

(ne)rovnice exponenciální, logaritmické, goniometrické

6. Řešte (ne)rovnice v oboru \mathbb{R} :

a) $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^x \cdot 3^{x+4} > -1$

b) $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$

f) $|2 - \log x| > 1$

c) $\log(x + 3) = \log x + \log 3$

g) $2 - |\log x| > 1$

d) $0,2^x > 3$

h) $-3 < \log|x - 4| < 2$

7. Řešte (ne)rovnice v oboru \mathbb{R} :

a) $\sin 10x = -\cos 10x$

d) $\frac{2}{\sin x} = \sin x + \cos x$

b) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

e) $\sin^2 x < 1$

c) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$

f) $\operatorname{tg} x \geq \operatorname{cot} x$

metoda substituce

8. Řešte (ne)rovnice v oboru \mathbb{R} :

a) $\sqrt{2x^2 + 5x} - \sqrt{2x^2 + 5x - 10} = \sqrt{2}$

d) $1\,000x^2 = x^{\log x}$

b) $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$

e) $12 \sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) + 5 \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 6$

f) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x > 2$

9. Řešte soustavy rovnic v oboru \mathbb{R} :

a)
$$\begin{aligned} \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-z} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x+y} - \frac{10}{y-z} &= \frac{7}{3} \\ \frac{3}{x-z} + \frac{5}{y-z} &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} |x+y| - |x-y| &= 4 \\ |x+y| + 2|x-y| &= 13 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5^{\frac{x+y}{2}} : 5^{\frac{x+y}{4}} &= 625 \\ 6^{\frac{x-y}{2}} : 6^{\frac{x-y}{4}} &= 216 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 5^{\log x} + 3^{\log y} &= 4 \\ 5^{2 \log x} - 3^{2 \log y} &= -8 \end{aligned}$$

Výsledky:

1 a) $(-\infty; 0) \cup (0; \frac{3}{11})$; b) $(-1; 1)$; c) \emptyset ; d) $\{-2\sqrt{3}; -1\}$; e) $-\frac{1}{4}$; f) \emptyset ; g) $(\frac{1}{2}; 4)$; h) $\langle 3; \infty \rangle$.
2 $\{\frac{27}{2}; -\frac{125}{2}\}$. **3** a) $-\frac{2}{5}$; b) 14.

4 a)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th style="border: none;">a</th><th style="border: none;">x</th></tr> <tr><td style="border: none;">{-1}</td><td style="border: none;">$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$</td></tr> <tr><td style="border: none;">{0; 2}</td><td style="border: none;">\emptyset</td></tr> <tr><td style="border: none;">$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$</td><td style="border: none;">$\{-\frac{a}{2}\}$</td></tr> </table>	a	x	{-1}	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	{0; 2}	\emptyset	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$	$\{-\frac{a}{2}\}$	b)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><th style="border: none;">a</th><th style="border: none;">x</th></tr> <tr><td style="border: none;">{0}</td><td style="border: none;">nemá smysl</td></tr> <tr><td style="border: none;">{1}</td><td style="border: none;">{1}</td></tr> <tr><td style="border: none;">$(\frac{1}{2}; \infty) \setminus \{1\}$</td><td style="border: none;">$\{\pm\sqrt{2a-1}\}$</td></tr> <tr><td style="border: none;">$(\infty; \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$</td><td style="border: none;">\emptyset</td></tr> </table>	a	x	{0}	nemá smysl	{1}	{1}	$(\frac{1}{2}; \infty) \setminus \{1\}$	$\{\pm\sqrt{2a-1}\}$	$(\infty; \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$	\emptyset	5 {14}.
a	x																					
{-1}	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$																					
{0; 2}	\emptyset																					
$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$	$\{-\frac{a}{2}\}$																					
a	x																					
{0}	nemá smysl																					
{1}	{1}																					
$(\frac{1}{2}; \infty) \setminus \{1\}$	$\{\pm\sqrt{2a-1}\}$																					
$(\infty; \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$	\emptyset																					

6 a) $\{-1\}$; b) $\{\log_6 18\}$; c) $\{\frac{3}{2}\}$; d) $(-\infty; \log_{0,2} 3)$; e) \mathbb{R} ; f) $(0; 10) \cup (1\,000; \infty)$; g) $(\frac{1}{10}; 10)$;
 h) $(-96; 3,999) \cup (4,001; 104)$. **7** a) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3\pi}{40} + \frac{k\pi}{10}\}$; b) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\}$;

c) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$; d) \emptyset ; e) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$; f) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \rangle$.

8 a) $\{-\frac{9}{2}; 2\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-\frac{1}{2}; 63\}$; d) $\{\frac{1}{10}; 1\,000\}$; e) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi\}$; f) $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{k\pi}{4}\}$.

9 a) $\{[6; -3; 2]\}$; b) $\{[5; 2]; [2; 5]; [-5; -2]; [-2; -5]\}$; c) $\{[14; 2]\}$; d) $\{[1; 10]\}$.

Literatura

Petáková, J. (2021). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha.

... a další středoškolské sbírky úloh...