

1. Lokální existence řešení

MOTIVACE

Úmluva. Budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(t, x) \quad (\text{DR})$$

za trvalého předpokladu $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá.

Definice. Buď I otevřený interval. Funkci $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme *řešením* (DR) v Ω , jestliže pro všechna $t \in I$ platí

- (i) $(t, x(t)) \in \Omega$,
- (ii) existuje vlastní $x'(t)$ a
- (iii) $x'(t) = f(t, x(t))$.

Poznámka. Budeme-li chtít zdůraznit definiční obor řešení, budeme hovořit o řešení (x, I) .

Poznámka. 1. Takto definované řešení je nutně C^1 (“klasické řešení”).

- 2. Platí princip “nalepování”: je-li $x(\cdot)$ řešení na (a, t_0) a na (t_0, b) , spojitě v $t = t_0$, pak je již řešení na (a, b) .

Lemma 1 (O integrální formulaci). *Nechť I je otevřený interval, $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá funkce splňující $(t, x(t)) \in \Omega$ pro každé $t \in I$ a nechť $t_0 \in I$.*

Potom je ekvivalentní

- (i) x je řešení (DR), splňující $x(t_0) = x_0$,
- (ii) pro každé $t \in I$ platí $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$.

Věta 2 (Peano). *Nechť $(t_0, x_0) \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce $x(\cdot) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, která je řešením (DR) a splňuje $x(t_0) = x_0$.*

Věta 3 (Arzela-Ascoli). *Nechť funkce $x_n(\cdot)$ jsou stejně omezené a stejně spojitě na $[0, T]$. Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující podposloupnost.*

Definice. Řekneme, že funkce množiny $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ jsou

- 1. *stejně spojitě*, jestliže pro každé $t \in K$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|x(t) - x(\tau)\| < \varepsilon$ pro všechna $\tau \in (t - \delta, t + \delta)$ a všechny $x(\cdot) \in M$.
- 2. *stejně omezené*, jestliže existuje $C > 0$ takové, že $\|x(t)\| \leq C$ pro všechna $t \in K$ a všechny $x(\cdot) \in M$.

Poznámka. Obecnější formulace A-A věty: Buď K kompaktní množina a $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ omezená množina stejně spojitých funkcí. Pak M je relativně kompaktní v $C(K, \mathbb{R}^n)$.

Poznámka. Důkaz A-A věty lze najít např. v Vrabie: Differential Equations (Theorem 8.2.1) nebo ve skriptech k MA (Věta 13.4.6)

Poznámka. Důkaz existence řešení diferenciální rovnice často pracuje s řešeními pozmeněné rovnice, které konvergují k něčemu, o čem se ukáže, že je to řešení původní rovnice. Často také využívají věty o pevných bodech (Banachova, Browerova, ...).

Poznámka. Je-li f spojitá a omezená v $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$, pak řešení existuje dokonce *globálně*, tj. pro $t \in \mathbb{R}$. Příklad rovnice $x' = \exp(x)$, $x(0) = 2$, jejíž (jediné) řešení $x(t) = \ln(1/(e^{-2} - t))$ nelze pokračovat za $t = e^{-2}$, ukazuje, že obecně je existence zaručena pouze *lokálně*.

2. Jednoznačnost řešení

Definice. Řekneme, že rovnice (DR) má v Ω vlastnost

1. *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení (x, I) , (y, J) , splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, platí $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J$.
2. *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení (x, I) , (y, J) , splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, existuje $\delta > 0$ tak že $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 4. *Rovnice (DR) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti, právě když zde má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Definice. Funkce f se nazývá *lokálně lipschitzovská* vzhledem k x v Ω , jestliže pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existují L a $\delta > 0$ tak, že

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

pro všechna $(t, x), (t, y) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U(x_0, \delta)$.

Věta 5. *Nechť f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Potom rovnice (DR) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Definice. $f \in C_x^1(\Omega)$ značí, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují a jsou spojité v Ω , pro každé i .

Lemma 6. *Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$. Potom f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω .*

Důsledek 7. *Nechť $f \in C(\Omega) \cap C_x^1(\Omega)$. Potom rovnice (DR) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti.*

3. Maximální řešení

Definice. Řešení $(\hat{x}, \hat{I})$ se nazve *prodloužením* řešení (x, I) , jestliže $\hat{I} \supset I$ a $\hat{x}(t) = x(t)$ pro každé $t \in I$.
Řešení (x, I) se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální (tj. $\hat{I} \supsetneq I$) prodloužení.

Věta 8. Každé řešení má alespoň jedno maximální prodloužení.

Věta 9 (Picard). Nechť $f \in C(\Omega) \cap C_x^1(\Omega)$. Pak pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje právě jedno maximální řešení x (DR) v Ω splňující $x(t_0) = x_0$.

Lemma 10. Řešení (x, I) , kde $I = (a, b)$, lze prodloužit za bod b , právě když platí

(i) $b < \infty$,

(ii) existuje $\lim_{t \rightarrow b-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$ a

(iii) $(b, x_0) \in \Omega$.

Věta 11 (O opuštění kompaktu). Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní množina, nechť (x, I) je maximální řešení, splňující $(t_0, x(t_0)) \in K$ pro nějaký $t_0 \in I$. Potom existují $t_1 > t_0$ a $t_2 < t_0$ taková, že $(t_1, x(t_1)) \notin K$ a $(t_2, x(t_2)) \notin K$.

Důsledek 12. Nechť (x, I) , $I = (a, b) \ni 0$, je maximální řešení autonomní rovnice $x' = f(x)$, kde $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá; nechť $x(0) \in \mathcal{K}$, kde $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ je kompaktní. Potom buď $b = \infty$, nebo existuje $t_1 \in (0, b)$ takové, že $x(t_1) \notin \mathcal{K}$. Podobně buď $a = -\infty$, nebo existuje $t_2 \in (a, 0)$ takové, že $x(t_2) \notin \mathcal{K}$.

4. Závislost na počáteční podmínce

Věta 13 (Gronwallovo lemma). *Nechť $w(t)$, $g(t)$ jsou nezáporné, spojitě na intervalu I , nechť $t_0 \in I$, $c \geq 0$. Nechť pro každé $t \in I$*

$$w(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right|.$$

Potom pro každé $t \in I$

$$w(t) \leq c \cdot \exp \left(\left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right| \right).$$

Lemma 14. *Nechť f je spojitá a (globálně) L -lipschitzovská v Ω vzhledem k x . Potom pro libovolná dvě řešení (x, I) , (y, J) v Ω a body $t, t_0 \in I \cap J$ platí*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| \exp(L|t - t_0|).$$

Definice. Nechť f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Potom definujeme *řešící funkci* $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$, kde (x, I) je (jediné) maximální řešení rovnice (DR) v Ω s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ a $t_0 \in I$. Zde G je maximální možná, tj. obsahuje všechny trojice $(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$, pro něž $\varphi(t, t_0, x_0)$ má smysl.

Věta 15. *Nechť f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Množina G z předchozí definice je otevřená a φ je spojitá na G .*

Důsledek 16. *Je-li $f = f(t, x, p)$ spojitá a navíc lokálně lipschitzovská vůči x a parametru p , závisí řešení $x' = f(t, x, p_0)$, $x(t_0) = x_0$ spojitě (a má otevřený definiční obor) vzhledem k t, t_0, x_0 i p_0 .*

Užitečný trik: přidáme “falešnou” rovnici $p' = 0$, $p(t_0) = p_0$, čímž problém převedeme na otázku závislosti na počáteční podmínce.

Poznámka. Řešící funkce je zřejmě diferencovatelná vzhledem k t , neboť $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, t_0, x_0) = f(t, \varphi(t, t_0, x_0))$.

Označme pro účely následující věty $\frac{\partial}{\partial w}$ derivaci ve směru $w \in \mathbb{R}^n$ dle proměnné x_0 .

Věta 17. *Nechť $f \in C(\Omega) \cap C_x^1(\Omega)$, $w \in \mathbb{R}^n$. Potom $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ existuje v každém bodě G . Označíme-li $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ a $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$, pak funkce u je řešením “rovnice ve variacích”*

$$u' = \nabla_x f(t, x(t))u, \quad u(t_0) = w. \quad (\text{VAR})$$

Poznámka. Za uvedených předpokladů dokonce $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ závisí spojitě na x_0 , tj. řešící funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k x_0 . Lze též ukázat, že φ je diferencovatelná vůči t_0 .

Poznámka. 1. Je-li $f \in C_x^k$, je $\varphi \in C_{x_0}^k$.

2. Za příslušných předpokladů je řešící funkce diferencovatelná též vůči parametru p ; viz poznámka za Větou 15.

5. Lineární rovnice

Definice. *Lineární rovnici* rozumíme

$$x' = A(t)x + g(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{LR})$$

kde $A(\cdot) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(\cdot) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

Definice. *Normu matice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme

$$\|A\| = \sup \{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\},$$

kde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ je norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 18 (Vlastnosti normy matice). *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom :*

- (i) $\|A\| \geq 0$, a $\|A\| = 0$ právě když $A = 0$;
- (ii) $\|aA\| = |a| \|A\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- (iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;
- (v) $|Ax| \leq \|A\| |x|$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
- (vi) je-li A regulární, pak $|Ay| \geq |y| / \|A^{-1}\|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Lze zavést jiné (nutně ekvivalentní) normy matice, např.

$$\|A\|_\infty = \max\{|A_{ij}|; 1 \leq i, j \leq n\}$$

kde A_{ij} značí prvek ij matice A . Výhoda výše uvedené normy je ve vlastnostech (iv-vi) Věty 18, které např. pro normu $\|A\|_\infty$ neplatí (resp. platí až na vhodnou konstantu).

Často (a mlčky) užívaná úvaha : $A_n \rightarrow A$ v normě, právě když $[A_n]_{ij} \rightarrow [A]_{ij}$ pro každé ij . Podobně (tj. po složkách) lze ekvivalentně nahlížet na další “limitní” operace maticových funkcí (derivace, integrál, součet řady).

Věta 19. *Nechť $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (LR), definované na celém (a, b) .*

Poznámka. Podstatný rys lineárních rovnic: globální existence řešení, tj. na oboru spojitosti $A(\cdot)$, $g(\cdot)$. Ve skutečnosti platí i pro nelineární rovnice $x' = f(t, x)$ se sublineární pravou stranou, tj. pokud $|f(t, x)| \leq a(t)|x| + g(t)$, kde $a(\cdot)$, $g(\cdot)$ jsou spojité.

Definice. *Homogenní rovnici* rozumíme (LR) pro $g(t) \equiv 0$, tj.

$$x' = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (\text{HR})$$

Věta 20. *Množina $\mathcal{R}_H$ řešení homogenní rovnice (HR) tvoří n -dimenzionální podprostor $C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$.*

Definice. *Fundamentálním systémem* pro (HR) rozumíme libovolnou bázi $\mathcal{R}_H$. Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentálního systému, nazýváme *fundamentální maticí* pro (HR).

Poznámka. Je-li $\Phi(t)$ nějaká fundamentální matice pak:

- $\Phi(t)$ splňuje “maticový tvar (HR)”, tj. $\Phi' = A(t)\Phi$;
- $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (a, b)$;
- obecné řešení (HR) má tvar $\Phi(t)C$, kde $C \in \mathbb{R}^n$ (sloupcový vektor);
- $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ je také fundamentální matice, navíc splňující $\tilde{\Phi}(t_0) = I$.

Věta 21 (Variace konstant). *Nechť $\Phi(t)$ je libovolná fundamentální matice pro (HR). Potom řešení rovnice (LR) lze napsat ve tvaru*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds, \quad t \in (a, b).$$

Definice. *Wronského determinant (Wronskián) rovnice (HR) je funkce $w(t) = \det(\Phi(t))$, kde Φ je (libovolná) fundamentální matice rovnice (HR).*

Věta 22 (Liouvilleova formule). *Nechť $\Phi(t)$ je maticové řešení (HR), nechť $w(t) = \det \Phi(t)$. Potom*

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right)$$

kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice A .

6. Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty a s maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

$$x' = Ax. \quad (\text{HK})$$

Definice. Maticovou exponenciálu definujeme předpisem $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (s konvencí $A^0 = I$).

Poznámka. Řada konverguje absolutně a platí $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Věta 23. Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice (HK) a platí $U(0) = I$.

Věta 24 (Vlastnosti maticové exponenciály). (I) $e^{aI} = e^a I$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$;

(II) pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A e^B$;

(III) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$;

(IV) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$; speciálně e^A je vždy regulární.

Důsledek 25 (Variace konstant pro (LK)). Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá, $t_0 \in (a, b)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jsou dána. Potom řešení rovnice

$$x' = Ax + g(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{LK})$$

má tvar

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} g(s) ds, \quad t \in (a, b).$$

Věta 26 (Výpočet maticové exponenciály). Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, J je její Jordanův kanonický tvar, $A = VJV^{-1}$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonála J . Potom $e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$, kde $e^{tJ} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})P(t)$, přičemž $P(t)$ je blokově diagonální matice se stejně velkými a stejně uspořádanými bloky jako J a blok velikosti k matice $P(t)$ je roven

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí $P^{-1}(t) = P(-t)$ a $\|P(t)\| \sim 1 + t^{m-1}$, kde m je velikost největší Jordanovy buňky.

Důsledek 27. Bud' $a = \max\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ a m velikost největší Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu s $\Re \lambda = a$. Pak existuje $M > 0$, že $\|e^{tA}\| \leq M(1+t^{m-1})e^{at}$ pro všechna $t \geq 0$. Speciálně pro všechna $\tilde{a} > a$ existuje $\tilde{M} > 0$, že $\|e^{tA}\| \leq \tilde{M}e^{\tilde{a}t}$ pro všechna $t \geq 0$.

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a její spektrum $\sigma(A)$ definujeme $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\Re < 0\}$, $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\Re = 0\}$, $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\Re > 0\}$. Prostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme $X_-(A)$, $X_+(A)$, $X_0(A)$ (nazýváme je *stabilní*, *nestabilní* a *centrální podprostor*).

Poznámka. Zřejmě $\mathbb{R}^n = X_-(A) \oplus X_+(A) \oplus X_0(A)$. Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k A a též vzhledem k e^{tA} .

Věta 28 (Asymptotické chování řešení (HK)). Nechť A je daná matice. Potom existují α, β, M a $c > 0$ takové, že pro každé $t \geq 0$ platí:

1. (stabilní podprostor) $x_0 \in X_-(A) \implies |e^{tA}x_0| \leq ce^{-\alpha t}|x_0|$;
2. (nestabilní podprostor) $x_0 \in X_+(A) \implies |e^{tA}x_0| \geq c^{-1}e^{\beta t}|x_0|$;
3. (centrální podprostor) $x_0 \in X_0(A) \implies c^{-1}(1+t)^{-M}|x_0| \leq |e^{tA}x_0| \leq c(1+t)^M|x_0|$.

Poznámka. Uvedené vlastnosti prostory $X_-(A)$, $X_+(A)$ a $X_0(A)$ charakterizují, tj. platí i opačné implikace. Pro $t \leq 0$ platí zrcadlové odhady: exponenciální růst na $X_-(A)$, exponenciální pokles na $X_+(A)$, polynomiální chování na $X_0(A)$.

7. Stabilita

MOTIVACE Lemma 14 *teoreticky* tvrdí spojitost řešení vůči x_0 , *prakticky* však (pro větší t) nemá vzhledem k exponenciálnímu odhadu význam. To nás vede ke zkoumání okolností, za nichž existují odhady, které se nezhoršují pro $t \rightarrow \infty$.

Definice. Nechť $f = f(t, x)$ je spojitá v otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a navíc lokálně lipschitzovská vůči x . Nechť $\Omega \supset I \times \{0\}$, kde $I = (\tau, \infty)$, a nechť $f(t, 0) = 0$ pro $\forall t \in I$.

Řekneme, že nulové řešení rovnice (DR) je

- (i) *stabilní*, jestliže $\forall t_0 \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tak, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0$;
- (ii) *nestabilní*, jestliže není stabilní;
- (iii) *lokální atraktor*, jestliže $\forall t_0 \in I \ \exists \eta > 0$ tak, že $|x_0| < \eta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno $\forall t \geq t_0$ a navíc $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow +\infty$;
- (iv) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc lokální atraktor;

Definice. (v) *uniformně stabilní*, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t_0 \in I$ tak, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0$;

- (vi) *uniformně asymptoticky stabilní*, jestliže je uniformně stabilní a navíc $\exists \eta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0 \ \forall t_0 \in I \ |x_0| < \eta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0 + T$.

Poznámka. V případě autonomní rovnice však je (asymptotická) stabilita totéž co (asymptotická) uniformní stabilita, neboť $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$.

Poznámka. 1. (iii) obecně neimplikuje (i) – Vinogradovův protipříklad.

2. Obecněji, řešení $\tilde{x}(t)$ rovnice $x' = f(t, x)$ se nazve stabilní (resp. uniformně stabilní, atd.), jestliže má analogickou vlastnost nulové řešení rovnice $u' = g(u, t)$, kde $g(u, t) = f(\tilde{x}(t) + u, t) - f(\tilde{x}(t), t)$.

3. V případě lineární rovnice (LR), tj.

$$x' = A(t)x + g(t),$$

je stabilita (libovolného) řešení ekvivalentní stabilitě nulového řešení příslušné homogenní úlohy, tj. (HR).

Věta 29. Je dána rovnice $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojitá v $I = (\tau, \infty)$. Nechť $\Phi(t)$ je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je

- 1. *stabilní*, právě když pro $\forall t_0 \in I$ je $\|\Phi(t)\|$ omezená v $[t_0, \infty)$;
- 2. *asymptoticky stabilní*, právě když $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$;
- 3. *uniformně stabilní*, právě když $\exists c > 0 \ \forall s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$;
- 4. *uniformně asymptoticky stabilní*, právě když $\exists \alpha, c > 0 \ \forall s < t \in I$ platí $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq ce^{-\alpha(t-s)}$.

Terminologie. Pro vlastní číslo λ_0 matice A rozlišujeme *algebraickou násobnost* (tj. kolikanásobným kořenem $\det(\lambda I - A)$ číslo λ_0 je) a naproti tomu *geometrickou násobnost* (tj. kolik lineárně nezávislých řešení rovnice $(\lambda_0 I - A)u = 0$ existuje).

Geometrická násobnost je obecně menší nebo rovna algebraické násobnosti. Pokud jsou si rovny, hovoříme o *polojednoduchém* vlastním čísle. Vlastní číslo je *polojednoduché*, právě když k němu nepřísluší žádné (netriviální) Jordanovy buňky, což jest právě když je A na příslušném vlastním podprostoru diagonalizovatelná.

Věta 30. Nechť A je konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice $x' = Ax$ je

- 1. (*uniformně*) *stabilní*, právě když: $\Re \lambda \leq 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$, přičemž $\Re \lambda = 0$ pouze pro *polojednoduchá* vlastní čísla;

2. (uniformně) asymptoticky stabilní, právě když $\Re \lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

Poznámka. Matice A splňující $\Re \lambda < 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$ se nazývá *hurwitzovská*.

Lemma 31. Je dána rovnice

$$x' = Ax + r(t, x).$$

Nechť existují $c, \alpha > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$ pro $\forall t \geq 0$; nechť $r(t, x) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a $|r(t, x)| \leq \gamma|x|$ pro $\forall t, x$, kde $\gamma < \alpha/c$.

Pak každé řešení splňuje

$$|x(t)| \leq c|x(t_0)| \exp(-\beta(t - t_0)),$$

pro $t \geq t_0$, kde $\beta = \alpha - c\gamma > 0$.

Poznámka. Speciálně lemma implikuje, že je nulové řešení je (uniformně) asymptoticky stabilní.

Věta 32 (O linearizované stabilitě). Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$, $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť $\Re \lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$. Potom x_0 je (uniformně) asymptoticky stabilní.

Věta 33 (O linearizované nestabilitě). Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$, $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť existuje $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$ takové, že $\Re \lambda > 0$. Potom x_0 je nestabilní.

Poznámka. Předchozí věty nepokrývají případ, kdy $\Re \lambda \leq 0$ pro $\lambda \in \sigma(A)$, přičemž alespoň pro jedno λ nastává rovnost. Za těchto okolností nelze obecně o stabilitě rozhodnout pouze na základě vlastností matice A ; mezi stabilitou rovnice $x' = f(x)$ a stabilitou "linearizované" rovnice $x' = Ax$ obecně není souvislost.

Příklad.

$$x' = x^3 \quad x' = -x^3$$

Definice. Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 . Nechť $f(x_0) = 0$ a nechť $\Re \lambda \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Potom x_0 nazýváme *hyperbolický stacionární bod* rovnice $x' = f(x)$.

Věta 34 (Hartman-Grobmanova věta). Nechť x_0 je hyperbolický stacionární bod rovnice $x' = f(x)$. Potom existuje homeomorfismus, převádějící řešení této rovnice na řešení rovnice $x' = Ax$, kde $A = \nabla f(x_0)$.

8. První integrál

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Funkce $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve *první integrál* rovnice

$$x' = f(x) \quad (\text{AR})$$

v Ω , jestliže :

1. U je třídy C^1 a *nekonstantní* v Ω ,
2. $t \mapsto U(x(t))$ je konstantní, pokud $x(t)$ je libovolné řešení (AR) v Ω .

Poznámka. Fyzikální význam: zachovávající se veličina (energie). Geometrický význam: řešení (AR) tvoří “vrstevnice” grafu U .

Věta 35. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá, $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je C^1 . Potom je ekvivalentní:

- (i) pro každé $x(t)$ řešení rovnice (DR) v Ω je $t \mapsto V(t, x(t))$ konstantní;
- (ii) $\partial_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x) = 0$ pro každý bod $(t, x) \in \Omega$.

Definice. Výraz $\partial_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x)$ podrobně zapsáno

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j}(t, x) f_j(t, x)$$

nazýváme *orbitální derivací* funkce V vzhledem k rovnici (DR). Značíme $\dot{V}_f$. Je-li $x(t)$ libovolné řešení (DR), pak $\frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \dot{V}_f(t, x(t))$.

Definice. Funkce $U_j(x)$ třídy C^1 nazveme *nezávislé* v bodě x_0 , jestliže matice $\left\{ \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x_0) \right\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ má hodnotu k .

Ekvivalentně: vektory $\nabla U_j(x_0) \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Zřejmě existuje nejvýše n funkcí, jež jsou nezávislé v daném bodě. Pokud tyto funkce jsou zároveň první integrály rovnice (AR), přičemž x_0 není stacionární bod, pak existuje nejvýše $n-1$ takových funkcí.

Věta 36. Nechť jsou dány první integrály $U_1, \dots, U_k$ rovnice (AR), které jsou nezávislé v bodě x_0 . Potom (AR) lze v jistém okolí x_0 redukovat na soustavu $n-k$ (diferenciálních) rovnic.

Věta 37. Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 , a nechť $f(x_0) \neq 0$. Potom rovnice (AR) má $n-1$ prvních integrálů, které jsou nezávislé v bodě x_0 .

Poznámka. Kombinace Vět 35 a 37 zaručuje (lokální) existenci řešení PDR 1. řádu

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(x) = 0$$

pro neznámou funkci $U = U(x)$. Mírnou adaptací důkazu lze získat (na jistém okolí $x_0 \in \Omega$) řešení obecnější rovnice

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_j} f_j(x, U) + g(x, U) = 0$$

s předepsanou hodnotou na libovolné C^1 nadploše Γ za předpokladu, že $f(x_0)$ není tečný směr ke Γ v bodě x_0 . Tento postup se nazývá *metoda charakteristik*.

9. Stabilita podruhé – Ljapunovské funkce

V této kapitole studujeme opět obecnou rovnici (DR), tj.

$$x' = f(t, x)$$

Trvalé předpoklady:

- $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $0 \in \mathcal{O}$,
- $I = (\tau, \infty)$,
- $f : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá,
- $f(t, 0) = 0$ pro všechna $t \in I$.

Tedy $x(t) = 0$ je řešení na I , jeho stabilitu vyšetřujeme.

Definice. Funkce $\omega : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve *pozitivně definitní*, jestliže je spojitá, $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$.

Definice. Funkce $V(t, x) : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve *Ljapunovská funkce* rovnice (DR) pro bod 0, jestliže:

- (i) V je spojitá, nezáporná a $V(t, 0) = 0$ pro všechna $t \in I$,
- (ii) funkce $t \mapsto V(t, x(t))$ je nerostoucí na I , kdykoli $x : I \rightarrow \mathcal{O}$ je řešení (DR),
- (iii) existuje pozitivně definitní funkce ω v $\mathcal{O}$ taková, že $V(t, x) \geq \omega(x)$ pro každé $(t, x) \in I \times \mathcal{O}$.

Poznámka. Je-li V třídy C^1 , je podmínka (ii) výše ekvivalentní nekladnosti orbitální derivace, tj.

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in I \times \mathcal{O}.$$

Důkaz je analogický Větě 35. Podobně podmínka (v) ve Větě 39 níže je ekvivalentní

$$\dot{V}_f(t, x) \leq -\eta(x),$$

pro všechny body $(t, x) \in I \times \mathcal{O}$.

Věta 38. *Nechť rovnice (DR) má Ljapunovskou funkci pro bod 0. Potom nulové řešení je stabilní.*

Věta 39. *Nechť rovnice (DR) má Ljapunovskou funkci V v $I \times \mathcal{O}$. Nechť navíc existují v $\mathcal{O}$ pozitivně definitní funkce λ a η takové, že:*

- (iv) $V(t, x) \leq \lambda(x)$ pro každé $(t, x) \in I \times \mathcal{O}$,
- (v) $\frac{d}{dt}V(t, x(t)) \leq -\eta(x(t))$, kdykoli x je řešení (DR) v $I \times \mathcal{O}$.

Potom 0 je asymptoticky stabilní v I .

Lemma 40. *Nechť ω je pozitivně definitní v $\mathcal{O}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $\overline{U(0, \varepsilon)} \subset \mathcal{O}$. Bud' $(x_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost v $\overline{U(0, \varepsilon)}$ splňující $\omega(x_n) \rightarrow 0$. Potom $x_n \rightarrow 0$.*

Věta 41. *Je dána rovnice $x' = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. 0 je asymptoticky stabilní v $[0, \infty)$;
2. $\Re \lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$, neboli A je Hurwitzovská;
3. existují $\alpha, c > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$ pro $\forall t \geq 0$;
4. existuje symetrická, pozitivně definitní $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že

$$A^T B + BA = -I.$$

Poznámka. Poslední rovnost se nazývá *Ljapunovova rovnice*. Z bodu 4 plyne, že $V(x) = x \cdot Bx$ je Ljapunovskou funkcí rovnice $x' = Ax$. Pomocí této Ljapunovské funkce lze také dokázat Větu 32 (o linearizované stabilitě).

10. Floquetova teorie

V této kapitole budeme studovat lineární rovnici

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (\text{LR})$$

kde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$ jsou spojité a T -periodické v $\mathbb{R}$. Budeme se zabývat otázkou existence periodických řešení a otázkou stability řešení pro (LR).

Poznámka. Pro danou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ podle Věty 19 existuje právě jedno řešení v $\mathbb{R}$. Je-li $x(t)$ řešení, je také $y(t) := x(t + T)$ řešení. Řešení $x(t)$ je T -periodické, právě když $x(T) = x(0)$.

Lemma 42. *Nechť A je regulární matice. Pak existuje matice B (obecně komplexní a ne jednoznačně určená) taková, že $e^B = A$.*

Věta 43 (Floquetova). *Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice úlohy (LR), nechť navíc $\Phi(0) = I$. Potom existuje regulární a vzhledem k času spojitá, T -periodická matice $Q(t)$ a dále (konstantní) matice B takové, že $\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$.*

Poznámka. Tzv. Floquetova transformace $x = Q(t)y$ převádí rovnici

$$x' = A(t)x \quad (\text{HR})$$

na rovnici s konstantními koeficienty $y' = By$. Matice $C = \Phi(T) = e^{TB}$ se nazývá *matice monodromie*. Tato matice reprezentuje řešící operátor v čase periody a lze z ní vyčíst mnohé podstatné informace (existence periodických řešení, stabilita, ...).

Věta 44. *Nechť matice $A(t)$ je spojitá, T -periodická. Potom je ekvivalentní:*

1. rovnice (LR) má pro dané T -periodické $b(t)$; právě jedno T -periodické řešení
2. rovnice (HR) má pouze triviální T -periodické řešení;
3. $1 \notin \sigma(C)$, kde C je matice monodromie.

Věta 45. *Uvažujme homogenní rovnici $x' = A(t)x$. Nechť C je matice monodromie. Potom nulové řešení je:*

- (i) stabilní, právě když: $|\lambda| \leq 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$ a pokud $|\lambda| = 1$, jde o polojednoduché vlastní číslo;
- (ii) asymptoticky stabilní, právě když $|\lambda| < 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$.