Cvičení 2 řešení (12.10.2023)

Úlohy.

1.* Pro systém [I-V] platí: pokud $t^+(x_0) < \infty$, pak nemůže existovat $\lim_{t \to t^+(x_0)-0} \varphi(t, x_0) \in \Omega$ ("maximalita" dynamického systému: každý dynamický systém je maximální).

   Řešení. (Tomáš Bárta). Pro spor nechť $y \in \omega(x_0)$. Pak existuje posloupnost časů $t_k \nearrow t^+(x_0)$ tak, že $\varphi(t_k, x_0) \to y$. Nechť $\tau \in (0, t^+(y))$, tj. $(\tau, y) \in G$. Množina G je otevřená, pak obsahuje nějaké okolí bodu (τ, y). Posloupnost $(\tau + t^+(x_0) - t_k, \varphi(t_k, x_0))$ konverguje k bodu (τ, y), a pak začinající z nějakého indexů musí ležet v tom okolí a pak i v G. Z vlastnosti V dynamického systému máme pak, že $(\tau + t^+(x_0) - t_k + t_k, x_0) \in G$, což je spor, protože $\tau + t^+(x_0) > t^+(x_0)$ a pak $\tau + t^+(x_0) \notin J(x_0)$.

   [Poznámka: to funguje i pro $\tau = 0$.] [Poznámka 2: využili jsme otevřenost G.]

   [Poznámka 3: Ze spojitosti funkce φ v bodě (τ, y) máme $\lim_{k\to\infty} \varphi(\tau + t^+(x_0) - t_k, \varphi(t_k, y_0)) = \varphi(\tau, y)$. Na jinou stranu, z vlastnosti V je $\varphi(\tau + t^+(x_0) - t_k, \varphi(t_k, y_0) = \varphi(\tau + t^+(x_0), x_0)$. Tuto úvahu ale zde nepotřebujeme.]

2. Pro systém [I-V] platí: pokud $(t, x_0) \in G$, pak $(-t, \varphi(t, x_0)) \in G$ a $\varphi(-t, \varphi(t, x_0)) = x_0$.

   Řešení. Bez újmy na obecnost $t > 0$. Označme $y_0 = \varphi(t, x_0)$. Chceme dokázat, že $(-t, y_0) \in G$. Pro spor předpokládejme, že $-t \notin J(y_0)$, což spolu s zápornosti $-t$ znamená, že $-t \leq t^-(y_0)$. Vezmeme libovolnou posloupnost $\varepsilon_k \searrow 0$ tak, že$(t^-(y_0) + \varepsilon_k, y_0) \in G$. Z vlastnosti V pak máme

$$\varphi(t^-(y_0) + \varepsilon_k, y_0 = \varphi(t, x_0)) = \varphi(t^-(y_0) + \varepsilon_k + t, x_0).$$

   Časy $t^-(y_0) + \varepsilon_k + t$ konvergují k $t + t^-(y_0)$, což za našeho předpokladu $t \geq -t^-(y_0)$ je nazáporné číslo menší $t < t^+(x_0)$ a pak $t + t^-(y_0) \in J(x_0)$. Ze spojitosti funkce φ v bodě $t^-(y_0) + t, x_0$ pak existuje limita pravé strany. Pak musí existovat limita i levé strany. Z libovolnosti posloupnosti ε_k a pomocí Heiného věty máme, že $\exists \lim_{t \searrow t^-(y_0)} \varphi(t, y_0) = \varphi(t^-(y_0) + t, x_0) \in \Omega$, což je spor z předchozí úlohou (která je formulována pro t^+, ale jistě platí i pro t^-).

3. Pro systém splňující vlastnosti [I-V] platí také vlastnost V′.

   Řešení. Vlastnost V′ můžeme přeformulovat takto:

   V″. $\forall x \in \Omega$ a $\forall s, t \in \mathbb{R}$, pokud $(t, x) \in G$ a $(s, x) \in G$
   pak $(s - t, \varphi(t, x)) \in G$, a $\varphi(s - t, \varphi(t, x)) = \varphi(s, x)$ ("altruistická" semigrupová vlastnost).

   Můžeme tady prohodit s, t, dostaneme pak navíc, že $(t - s, \varphi(s, x)) \in G$, a $\varphi(t - s, \varphi(s, x)) = \varphi(t, x)$.

   Vrátíme se teď k naše úloze. Máme $(t, x_0) \in G, (s, x_0) \in G$, chceme ukázat, že $(t - s, \varphi(s, x)) \in G$.

   Označme $y_0 = \varphi(t, x_0)$. Pak z úlohy 2 je $(-t, y_0) \in G$ a $\varphi(-t, y_0) = x_0$. Dále, $(s, x_0) = (s, \varphi(-t, y_0)) \in G$ pak vlastnost V implikuje, že $(s - t, y_0) \in G$.

   [Myšlenka toho důkazu je jasná (křeslení obrázku je užitečně): jeden z "krajnich" bodů bereme jako "počáteční" bod, pak původní počáteční bod stává prostředním bodem].

4. Pro systém [I-IV, V′] platí: pokud $(t, x_0) \in G$, pak $(-t, \varphi(t, x_0)) \in G$ a $\varphi(-t, \varphi(t, x_0)) = x_0$.

   Řešení. Je to snadný důsledek vlastnosti V′.

5. Pro systém splňující vlastnosti [I-IV, V′] platí také vlastnost V.

   Řešení. Máme: $(t, x_0) \in G$ a $(s, \varphi(t, x_0)) \in G$, chceme ukázat, že $(s + t, x_0) \in G$. Označme $y_0 = \varphi(t, x_0)$. Pak z úlohy 4 je $(-t, y_0) \in G$ a $\varphi(-t, y_0) = x_0$. Teď, je $(-t, y_0) \in G$ a $(s, y_0) \in G$, pak z vlastnosti V″ je také $(s + t, \varphi(-t, y_0)) \in G$ [je také $(-t - s, \varphi(s, y_0)) \in G$, to ale nepotřebujeme].

   Je to stejná myšlenka jako v úloze 3: teď, prostřední bod bereme jako "počáteční".

6. Pro dynamický systém platí: $\forall (t, x_0) \in G$ je $J(\varphi(t, x_0)) = -t + J(x_0)$.

   Řešení.

   Vlastnost V implikuje $J(\varphi(t, x_0)) \subset -t + J(x_0)$, vlastnost V′ implikuje $J(\varphi(t, x_0)) \supset -t + J(x_0)$.

7. Pro dynamický systém platí: pokud $t^+(x_0) < \infty$, pak $\omega(x_0) = \emptyset$.

   Řešení. (Tomáš Bárta) Pro spor, nechť $y \in \omega(x_0)$. Krok 1: existuje $z \in \omega(x_0), z \neq y$. Krok 2. Vezmeme posloupnost časů $t_k \nearrow t^+(x_0)$ tak, že $\varphi(t_{2k}, x_0) \to y$ a $\varphi(t_{2k+1}, x_0) \to z$. Teď, posloupnost $\varphi(t_{2k+1}, x_0) = \varphi(t_{2k+1} - t_{2k}, \varphi(t_{2k}, x_0))$.

   Ze spojitosti funkce φ v bodě $(0, y)$ máme, že pravá strana konverguje k $\varphi(0, y) = y$. Na jinou stranu, levá strana konverguje k z.