Cvičení 2 (12.10.2023)

Definice. Nechť dvojice (φ, Ω), kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi = \varphi(t,x) : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \Omega$ je zobrazení, splňuje následující vlastnosti:

I. $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina;

II. $\forall x \in \Omega$ je $G \cap (\mathbb{R} \times \{x\}) =: (t_x^-, t_x^+) \times \{x\} \equiv J_x \times \{x\}$, kde $-\infty \le t_x^- < 0 < t_x^+ \le +\infty$;

III. $G \ni (t,x) \mapsto \varphi(t,x)$ je spojité zobrazení;

IV. $\forall x \in \Omega$ je $\varphi(0,x) = x$;

V. $\forall x \in \Omega$ a $\forall s,t \in \mathbb{R}$, pokud $(t,x) \in G$ a $(s, \varphi(t,x)) \in G$,
pak $(s+t, x) \in G$ a $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(t+s, x)$ ("egoistcká" semigrupová vlastnost).

Pak se dvojice (φ, Ω) nazývá dynamickým systémem.

Úlohy.

Příští 5 úloh ukazují, že vlastnost V dynamického systému je ekvivalentní následující vlastnosti V$'$:

V$'$. $\forall x \in \Omega$ a $\forall s,t \in \mathbb{R}$, pokud $(t,x) \in G$ a $(s+t, x) \in G$
pak $(s, \varphi(t,x)) \in G$, a $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(t+s, x)$ ("altruistická" semigrupová vlastnost).

Zejmena, úlohy 1,2,3 ukazují, že z vlastnosti I-V plyne vlastnost V$'$, a úlohy 4,5 ukazují, že z vlastnosti [I-IV, V$'$] plyne vlastnost V.

1.* Pro systém [I-V] platí: pokud $t^+(x_0) < \infty$, pak nemůže existovat $\lim\limits_{t \to t^+(x_0)-0} \varphi(t, x_0) \in \Omega$ ("maximalita" dynamického systému: každý dynamický systém je maximální).

2. Pro systém [I-V] platí: pokud $(t, x_0) \in G$, pak $(-t, \varphi(t,x_0)) \in G$ a $\varphi(-t, \varphi(t,x_0)) = x_0$.

3. Pro systém splňující vlastnosti [I-V] platí také vlastnost V$'$.

4. Pro systém [I-IV, V$'$] platí: pokud $(t, x_0) \in G$, pak $(-t, \varphi(t,x_0)) \in G$ a $\varphi(-t, \varphi(t,x_0)) = x_0$.

5. Pro systém splňující vlastnosti [I-IV, V$'$] platí také vlastnost V.

Takže, vlastnosti V a V$'$ jsou ekvivalentní. Některé další vlastnosti dynamického systému:

6. Pro dynamický systém platí: $\forall (t, x_0) \in G$ je $J(\varphi(t,x_0)) = -t + J(x_0)$.

7. Pro dynamický systém platí: pokud $t^+(x_0) < \infty$, pak $\omega(x_0) = \emptyset$.

Následující úlohy ukazují, že "pomocné" podmínky v definici dynamického systému jsou také podstatné.

8. Pokud vlastnosti I, II nahradíme vlastností

   II$'$. $\forall x \in \Omega$ je $G \cap (\mathbb{R} \times \{x\}) =: [0, t_x^+) \times \{x\} \equiv J_x \times \{x\}$ pro nějaký $0 < t_x^+ \le \infty$

   pak ekvivalenci V a V$'$ již nemáme. Ověřte to na příkladě
$$\varphi(t, x_0) = t + x_0, \quad t \in J(x_0) \equiv [0,1), \; x_0 \in \Omega \equiv \mathbb{R}.$$

9. Ověřte vlastnosti dynamického systému:
$$\varphi(t,(x_0,y_0)) = \begin{cases} (t+x_0, y_0), & t \in (-\infty, -x_0), x_0 < 0, y_0 \in \mathbb{R}, \\ (x_0, y_0 + t), & t \in \mathbb{R}, x_0 \ge 0, y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Úlohy na ω-limit set. Najděte ω-limitní množinu pro systém. Pro úlohy 10,11 je buď $\Omega = (-1,1) \times \mathbb{R}$ nebo $\Omega = \mathbb{R}^2$, pro úlohy 12,13 je buď $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ nebo $\Omega = \mathbb{R}^2$.

10. $\begin{cases} x' = (1-x^2)(1-y^2+x), \\ y' = xy, \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = (1-x^2)(1-y^2-x), \\ y' = xy, \end{cases}$

Návod: použijte funkci $V(x,y) = -\ln(1-x^2) + y^2 - \ln y^2$.

12. $\begin{cases} x' = -y(1-x^2), \\ y' = x(1-y^2) \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -y(1-x^2), \\ y' = x(1-y^2) \end{cases}$

Návod: použijte funkci $V(x,y) = -\ln(1-x^2) - \ln(1-y^2)$.

14. Nabídněte systém, pro který $\Omega = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, a pro nějaké (x_0, y_0) je
$$\omega((x_0,y_0)) = \{(x,y) : \; x + y = 1, \; 0 < x < 1\}.$$

    Návod: (a) začnete z kreslení možných linií urovní, pak (b) napište odpovidající systém (jeho řešení budou periodickými), nakonec snažte se trochu (c) modifikovat ten systém.