18 Optimální regulace

V této kapitole studujeme rovnice tvaru

$$x' = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \tag{18.1}$$

kde $f(x,u) : \Omega \times U \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ a $u = u(t)$ je *přípustná regulace*, tj. prvek

$$\mathcal{U} = \{u : [0,T] \to U,\ u \text{ je měřitelná}\}.$$

Je obvyklé (ačkoliv teorie to nevyžaduje), že $m < n$, tj.dimenze regulace je menší než dimenze celého systému. Typické problémy:

1. pro jaká $x_0, t > 0$ existuje $u(.) \in \mathcal{U}$ tak, že $x(t) = 0$ (regulovatelnost)?
2. táž otázka, navíc pro minimální t (časově optimální regulace).
3. regulovatelnost zpětnou vazbou. Existuje-li $R : \Omega \to U$ tak, že 0 je asymptoticky stabilní pro systém $x' = f(x, R(x))$?
4. obecněji: najít $u(.)$ takové, aby funkcionál

$$P[u(.)] = g(x(t)) + \int_0^t r(x(s), u(s))ds$$

byl maximální. Varianty: $t > 0$ libovolné, předepsaná koncová podmínka na $x(t)$ (Mayerův problém); nebo $t = T$ pevně dané, zatímco $x(T)$ není určeno (Bolzův problém).

Úlohy vedoucí k problémům optimální regulace

1. Parkovací problém. Máme rovnici

$$mx'' = u, \qquad \text{s počátečními podmínkami } x(0) = x_0, \quad x'(x_0) = y_0,$$

kde $x(t)$ je poloha auta, $x'(t)$ je jeho rychlost a přípustná regulace $u(t)$ je funkce $u(t) : [0,T] \to [-1,1]$. Cíl: najít takovou regulaci $u(.)$, aby $x(T) = x'(T) = 0$, navíc pro nejmenší možný čas $T \geq 0$.

2. Přistání na Měsíci. Máme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -g + \frac{u}{m}, \\ m' &= -ku, \end{aligned}$$

kde $x(t)$ je výška rakety, $x'(t)$ je její rychlost, $m(t)$ je její hmotnost, regulace $u(t) : [0,T] \to [0,M]$ je tah motoru (M je maximální tah motoru), koeficient $k > 0$ odpovídá za spotřebu paliva. Cíl: najít regulaci $u(.)$ pro kterou $x(T) = x'(T) = 0$, navíc T je nejmenší možný (varianty: spotřeba je nejmenší, tj. $x(T)$ je maximální; nebo $-\alpha T + \beta m(T)$ je maximální, s některými koeficienty $\alpha, \beta > 0$).

3. Problém vytápění zřídka používaného domu (problém chalupáře). Máme rovnici

$$x' = -kx + u, \quad x(0) = x_0,$$

kde $x(t)$ je tepolota v domě, $u(t)$ je příkon topení. Cíl: najít regulaci $u(.) : [0,T] \to [0,M]$ maximalizující $\beta x(T) - \int_0^T \alpha u(t)dt$.

4. Investice vs spotřeba. Nechť $x(t)$ je kapitál, $k > 0$ je koeficient odpovídající přirozenému růstu, $u(t)$ je míra investic (pak $1 - u(t)$ je míra spotřeby). Pak kapitál $x(.)$ je řízen rovnicí

$$x' = kxu.$$

Cíl: maximalizovat celkovou spotřebu za pevný za nějaký pevný čas $T > 0$, neboli maixmalizovat funkcionál

$$P[u(.)] = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt.$$

18.1 Lineární úloha - regulovatelnost, pozorovatelnost.

Uvažujeme nejprve lineární problém

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0, \\ u(.) &\in \mathcal{U} = L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m), \end{aligned} \tag{18.2}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou matice. Z (Carathéodoryho) teorie plyne, že pro každé $u(.)$ existuje jediné řešení, dané navíc vzorečkem (variace konstant)

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Definice. Řekneme, že regulace $u(.)$ přivádí počáteční stav x_0 do 0 v čase t, jestliže příslušné řešení splňuje $x(t) = 0$. Značíme $x_0 \xrightarrow[u(.)]{t} 0$. Množinu

$$\mathcal{R}(t) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \ \exists u(.) \in \mathcal{U} \ \text{ t.ž. } x_0 \xrightarrow[u(.)]{t} 0 \right\}$$

nazýváme *oblastí regulovatelnosti* v čase t.

Klíčové pozorování. Z předchozí formule plyne, že pro úlohu (18.2) nastává $x_0 \xrightarrow[u(.)]{t} 0$, právě když

$$x_0 = -\int_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds. \tag{KP}$$

Definice. Kalmanovou maticí rozumíme matici typu $n \times nm$

$$\mathcal{K}(A,B) = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B).$$

Lemma 18.1. *Pro každé $l \geq 0$ celé je $A^l \in \operatorname{Lin}\left\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\right\}$.*

Věta 18.1. *Pro úlohu (18.2) je pro $t > 0$ libovolné $\mathcal{R}(t) = \operatorname{Lin}\{g_1, \dots, g_{mn}\}$, kde $\{g_j\}$ jsou sloupce Kalmanovy matice $\mathcal{K}(A,B)$.*

Důsledek. Úloha (18.2) je (globálně) regulovatelná (tj. $\mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$ pro každé $t > 0$), právě když $\mathcal{K}(A,B)$ má hodnost n.

Definice. Systém

$$\begin{aligned} x' &= Ax, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Bx \end{aligned} \tag{18.3}$$

se nazve pozorovatelný (skrze veličinu $y = Bx$), jestliže platí: jsou-li x_1, x_2 řešení, pro která $Bx_1 \equiv Bx_2$ na nějakém netriviálním intervalu $[0,t]$, pak už nutně $x_1(0) = x_2(0)$.

Věta 18.2. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou dány. Potom je ekvivalentní:*

1. *systém (18.3) je pozorovatelný skrze $y = Bx$,*
2. *systém $x' = A^Tx + B^Tu$ je globálně regulovatelný,*
3. *hodnost $\mathcal{K}(A^T, B^T)$ je n.*

Poznámka. Předchozí věta tvrdí, že "pozorovatelnost" a "regulovatelnost" jsou v určitém smyslu duální pojmy. Následující věta je typickým příkladem *principu linearizace*: řešitelnost lineární úlohy implikuje lokální řešitelnost (hladké) nelineární úlohy.

Věta 18.3. *[O lokální regulovatelnosti.] Nechť $f(0,0) = 0$, $f(x,u)$ je C^1 na okolí $(0,0)$ a nechť U (tj. obor hodnot přípustných regulací) obsahuje okolí 0. Nechť linearizovaná úloha, tj. (18.2) pro $A = \nabla_x f(0,0)$, $B = \nabla_u f(0,0)$ je globálně regulovatelná.*
Pak úloha (18.1) je lokálně regulovatelná (tj. pro každé $t > 0$ obsahuje $\mathcal{R}(t)$ okolí nuly).

18.2 Zpětná vazba, stabilizovatelnost.

Ptejme se, zda lze regulaci volit automaticky, tj. ve formě zpětné vazby $u = F(x)$. Takový systém určitě nebude regulovatelný v konečném čase (to by odporovalo jednoznačnosti řešení); může však být (asymptoticky) stabilní.
Odpověď je opět skryta v Kalmanově matici a dostaneme opět výsledek globální pro lineární problém a výsledek lokální pro hladký, nelineární problém.

Lemma 18.2. *Matice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $p(\lambda) = \lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \lambda^j$*. Speciálně: volbou* β_j *lze docílit libovolného tvaru spektra* $\sigma(A)$.

Věta 18.4. *Je-li systém* $x' = Ax + Bu$ *regulovatelný, pak existuje* $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *takové, že* $\sigma(A+BF) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$*, kde* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *jsou dána libovolně. Speciálně, lineární zpětnou vazbou tvaru* $u = Fx$ *lze zaručit (exponenciální) asymptotickou stabilitu.*

Věta 18.5. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 18.3. Pak existuje* $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *takové, že systém* $x' = f(x, Fx)$ *je v počátku lokálně asymptoticky stabilní.*

18.3 Časově optimální regulace lineární úlohy.

Nyní se budeme zabývat opět lineární úlohou, leč pouze s omezenými hodnotami přípustné regulace:

$$\begin{aligned} &x' = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \\ &u(.) \in \mathcal{U} = \{u : [0,T] \to [-1,1]^m \text{ měřitelné}\}, \end{aligned} \tag{18.4}$$

kde opět $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jsou matice. Symboly $x_0 \xrightarrow[u(.)]{t} 0$ a $\mathcal{R}(t)$ mají týž význam jako v sekci 1 výše a ovšem platí klíčové pozorování (KP). Zaměříme se na problém časově optimální regulace. Budeme potřebovat dva hlubší výsledky z FA:

Tvrzení 3. *[Banach-Alaoglu.] Množina přípustných regulací v (18.4) je* $*$*-slabě sekvenciálně kompaktní v* $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$*. Tj. pro každou posloupnost* $\{u_n\} \subset \mathcal{U}$ *existuje podposloupnost* $\{\widetilde{u}_n\}$ *a funkce* $u \in \mathcal{U}$ *taková, že* $\widetilde{u}_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *v* $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$*, tj.*

$$\int_0^T M(t)\cdot \widetilde{u}_n(t)\,dt \to \int_0^T M(t)\cdot u(t)\,dt$$

pro libovolnou pevnou funkci $M(t) \in L^1(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Poznámka. Z formule variace konstant si snadno rozmyslíme, že konvergence $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ implikuje $x_n(t) \to x(t)$ pro příslušná řešení bodově v $[0,T]$.

Tvrzení 4 (Krein-Milman.)**.** *Je-li* K *kompaktní, konvexní, neprázdná podmnožina lokálně konvexního topologického prostoru* X*, pak* $K = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}K)$*, kde* $\mathrm{ext}K$ *jsou extremální body* K*. Speciálně* K *obsahuje extremální bod.*
Bod $a \in K$ *se nazve extremální, jestliže neexistují* $x, y \in K$ *takové, že* $x \neq y$ *a* $a = (x+y)/2$*.*
Ekvivalentně: a *je extremální v* K*, právě když* $K \setminus \{a\}$ *je konvexní. Symbolem* $\overline{\mathrm{co}}(M)$ *rorumíme uzávěr konvexního obalu* M*.*

Věta 18.6. *Je dána úloha (18.4). Potom pro každé* $t > 0$ *je* $\mathcal{R}(t)$ *konvexní, symetrická, uzavřená, a* $\mathcal{R}(t_1) \subset \mathcal{R}(t_2)$ *pro* $t_1 < t_2$*.*

Důsledek. Oblast globální regulovatelnosti $\mathcal{R} := \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t)$ je konvexní a symetrická.

Věta 18.7. *Nechť* $\mathcal{K}(A,B)$ *má hodnost* n *a nechť* $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ *pro každé* $\lambda \in \sigma(A)$*. Potom* $\bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^n$*.*

Poznámka. Je-li dokonce $\mathrm{Re}\,\sigma(A) < 0$, předchozí věta snadno plyne z Věty 18.3 (o lokální regulovatelnosti).

Definice. Řekneme, že $u(.) \in \mathcal{U}$ je regulace typu *bang-bang*, jestliže $u_i(t) = \pm 1$ pro s.v. t, pro všechna $i = 1, \dots, n$. Jinými slovy, $u(t)$ se skoro stále nachází v některém z rohů krychle $[-1,1]^m$ přípustných hodnot.

Věta 18.8. *[Princip bang-bang.] Nechť $x_0 \in \mathcal{R}(t)$. Pak existuje $u(.) \in \mathcal{U}$ typu bang-bang taková, že $x_0 \xrightarrow[u(.)]{t} 0$.*

Poznámka. V důkazu se užila jen existence extremálního bodu. Plně znění Krein-Milmanovy věty implikuje, že libovolná regulace lze $*$-slabě aproximovat (konečnou) konvexní kombinací regulací typu bang-bang (a tedy každé řešení lze aproximovat řešeními, poháněnými konečnou konvexní kombinací regulací typu bang-bang).

Věta 18.9. *Nechť $x_0 \in \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t)$. Pak existuje t^* a $u^*(.) \in \mathcal{U}$ taková, že $x_0 \xrightarrow[u^*(.)]{t^*} 0$, přičemž čas t^* je nejmenší možný, tj. $x_0 \notin \bigcup_{t<t^*} \mathcal{R}(t)$.*

Dusledek (Vět 18.8 a 18.9). Je-li $x_0 \in \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t)$, existuje časově optimální $u^*(.) \in \mathcal{U}$ typu bang-bang taková, že $x_0 \xrightarrow[u^*(.)]{t^*} 0$.

Věta 18.10. *[Pontrjaginův princip maxima.] Nechť $u^*(.) \in \mathcal{U}$, $x_0 \xrightarrow[u^*(.)]{t^*} 0$, kde t^* je optimální čas. Pak existuje $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ takové, že*

$$h \cdot e^{-sA} B u^*(s) = \max_{\eta \in [-1,1]^m} h \cdot e^{-sA} B \eta, \qquad \textit{pro s.v. } t \in [0, t^*]. \tag{18.5}$$

Poznámka. Uvedená věta je typickým příkladem nutné podmínky extrému: na první pohled není zřejmé, proč platí, ani k čemu je užitečná. V konkrétních příkladech však zpravidla vede k identifikaci jednoho či několika málo kandidátů na extrém, mezi nimiž už snadno rozhodneme.

18.4 Pontrjaginův princip - obecná verze.

Závěrem budeme uvažovat obecnou optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} &x' = f(x,u), \qquad x(0) = x_0, \\ &u(.) \in \mathcal{U} = \{u : [0,T] \to U \text{ měřitelné}\}, \\ &P[u(.)] = g(x(T)) + \int_0^T r(x(s), u(s))\, ds. \end{aligned} \tag{18.6}$$

Cílem je najít $u(.) \in \mathcal{U}$ takové, že hodnota funkcionálu $P[u(.)]$ je maximální. V zadání úlohy je $T > 0$ dáno pevně, na hodnotu $x(T)$ neklademe žádné podmínky (tzv. Bolzův problém).

Věta 18.11. *[Pontrjaginův princip – Bolzův problém.] Nechť $u^*(t) \in \mathcal{U}$ je lokální maximum úlohy (18.6); nechť $x^*(t)$ je příslušné řešení a nechť funkce $f = f(x,u)$, $r = r(x,u)$ a $g = g(x)$ jsou C^1 na okolí grafů $x^*(t)$, $u^*(t)$.*
Potom pro s.v. $t \in [0,T]$ je

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = \max_{\eta \in \mathcal{U}} H(x^*(t), p^*(t), \eta), \tag{18.7}$$

kde

$$H(x,p,u) = p^T f(x,u) + r(x,u) \tag{18.8}$$

je tzv. Hamiltonián a $p^*(t) \in \mathbb{R}^n$ je řešení adjungované úlohy

$$\left(p^T\right)' = -\nabla_x H(x^*, p, u^*) \tag{18.9}$$

s koncovou podmínkou

$$p^T(T) = \nabla_x g(x^*(T)). \tag{18.10}$$

Poznámka. Adjungovaná rovnice (18.9) po složkách

$$p_i' = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t)) - \frac{\partial r}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t)), \qquad p_i(T) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(T)).$$

To je lineární rovnice a má tedy – pro daná $x^*(t), u^*(t)$ – jediné (AC) řešení.

Lemma 18.3. *Nechť $z' = A(t) z$, nechť $\left(p^T\right)' = -p^T A(t)$. Potom $p \cdot z$ je konstantní.*