16 Carathéodoryho teorie

V celé kapitole I je interval libovolného typu.

Definice. Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ se nazve absolutně spojitá, značíme $x \in \mathrm{AC}(I)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné *disjunktní* intervaly $(a_i, b_i) \subset I$ platí

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon. \tag{16.1}$$

Funkce x se nazve *lokálně absolutně spojitá*, značíme $x \in \mathrm{AC}_{loc}(I)$, jestliže $x \in \mathrm{AC}(J)$ pro každý kompaktní interval $J \subset I$.

Tvrzení 1. *Nechť $x \in \mathrm{AC}(I)$. Potom x' je definována skoro všude v I, náleží do $L^1(I)$ a $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s)\,ds$ pro všechna $t_1, t_2 \in I$.*

Tvrzení 2. *Nechť $h \in L^1(I)$, $t_0 \in I$. Potom funkce $x(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$ náleží do $\mathrm{AC}(I)$; navíc $x' = h$ skoro všude.*

Značení. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina s body $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $U_\delta(t_0) \equiv (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ je interval v $\mathbb{R}$, $U_\Delta(x_0)$ je koule v $\mathbb{R}^n$, $Q(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \equiv U_\delta(t_0) \times U_\Delta(x_0)$ je válec v $\mathbb{R}^{n+1}$. Pro funkce $x = x(t) : \ I \to \mathbb{R}^n$ značíme $\operatorname{graf} x = \{(t, x(t)) : \ t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f(t, x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ splňuje Carathéodoryho podmínky, značíme $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, jestliže pro každé $(t_0, x_0) \in \Omega$ existuje válec

$$U_\delta(t_0) \times U_\Delta(x_0) \equiv Q(t_0, x_0; \delta, \Delta) \subset \overline{Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)} \subset \Omega$$

a funkce $m \in L^1(\overline{U_\delta(t_0)})$ tak, že

I. pro každé $x \in U(x_0, \Delta)$ je funkce $f(., x)$ měřitelná v $U(t_0, \delta)$,

II. pro skoro každé $t \in U(t_0, \delta)$ je funkce $f(t, .)$ spojitá v $U(x_0, \Delta)$,

III. $|f(t, x)| \leq m(t)$ pro[4] skoro všechna t pro všechna $x \in Q(t_0, x_0; \delta, \Delta)$.

Definice. Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$. Funkce $x : \ I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá řešením rovnice

$$x' = f(t, x) \tag{16.2}$$

v Ω ve smyslu Carathéodoryho, jestliže $\operatorname{graf} x \subset \Omega$, $x \in \mathrm{AC}_{loc}(I)$ a platí $x'(t) = f(t, x(t))$ pro skoro všechna $t \in I$.

Lemma 16.1. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $\operatorname{graf} x \subset \Omega$. Potom funkce $t \mapsto f(t, x(t))$ je v $L^1_{loc}(I)$.*

Důkaz. **Krok 1: $t \mapsto f(t, x(t))$ je měřitelná.**

Nechť $t_0 \in I$ je libovolný bod intervalu I. Vezmeme uzavřený válec kolem bodu $(t_0, x(t_0))$ ležící v Ω, tj.

$$(t_0, x(t_0)) \in \overline{U_\delta(t_0) \times U_\Delta(x_0)} \subset \Omega.$$

Stačí dokázat, že $t \mapsto f(t, x(t))$ je třídy $L^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$.
Sestrojme posloupnost $x^{(j)}(.)$ funkcí, které

- jsou po částech konstantní,
- konvergují bodově k $x(.)$ na intervalu $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Například, můžeme vzít krokové funkce z Riemannových parciálních součtu, tj.

$$x^{(j)}(t) = x(t_k^{(j)}), t \in [t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)}) = \Delta_k^{(j)}, \qquad t_0 - \delta = t_0^{(j)} < \ldots < t_{N_j}^{(j)} = t_0 + \delta.$$

S ohledem na spojitost (a tedy stejnoměrnou spojitost) funkce $x(.)$ na uzavřeném intervalu $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, můžeme předpokládat, že $\sup_{[t_0-\delta,t_0+\delta]} |x(t) - x^{(j)}(t)| \leq \frac{1}{j}$, tj. $x^{(j)}$ konverguje k $x(.)$ stejnoměrně (a tedy i bodově, což nám stačí).

Dále, každá funkce $f(t, x^{(j)}(t))$ je měřitelná. Opravdu, $f(t, x^{(j)}(t)) = f(t, x(t_k^{(j)}))$ pro $t \in \Delta_k^{(j)}$, kde každá funkce $f(t, x(t_k^{(j)}))$ je měřitelná díky vlastnosti I Carathéodorzvské funkce. Funkce $f(t, x^{(j)}(t))$ je tedy měřitelná jako po částech měřitelná funkce (ostatně vyplývá ze vzorce spojujícího vzory libovolného intervalu $J \in \mathbb{R}$, tj. $(x^{(j)})^{-1}(J) = \bigcup (x^{(j)})|^{-1}_{\Delta_k^{(j)}}(J))$).

Nakonec, máme že $f(t, x^{(j)}(t)) \to f(t, x(t))$ skoro všude na $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ (což plyne ze vlastnosti II Carathéodorzvské funkce: pro skoro všechny časy, funkce f je všude spojitá jako funkce prostorové proměnné). Pak, $f(t, x(t))$ je měřitelná.

Krok 2: $f(t, x(t))$ **je lokálně integrovatelná.** To plyne z věty o integrovatelné majorantě, protože máme $|f(t, x(t))| \leq m(t)$. Pak $f(t, x(t))$ je třídy $L^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$.

□

Lemma 16.2. *Nechť $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a* graf $x \subset \Omega$. *Potom x je řešením* (16.2) *ve smyslu Carathéodoryho, právě když*

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds \tag{16.3}$$

pro všechna $t_1, t_2 \in I$.

Důkaz. (⇒) Zde používáme předchozí lemmu 16.1 a vlastnosti absolutně spojitých funkcí.

(⇐) Zde používáme jen vlastnosti absolutně spojitých funkcí.

□

Poznámka. Na základě uvedené integrální formulace se (analogicky ke klasické teorii) může rozvinout teorie AC ("Carathéodoryho") řešení: lokální existence, podmínky jednoznačnosti, maximální řešení, spojitá závislost na počáteční podmínce, atd. Zde se omezíme na jistou variantu Picardovy věty, zahrnující dokonce globální existenci a spojitou závislost na datech rovnice.

[???: 6] Může se stát, že funkce f_1, f_2 se rovnají skoro všude, ale $f_1 \in CAR(\Omega)$, když $f_2 \notin CAR(\Omega)$?

[???: 7] Nechť $f_1 \in CAR(\Omega)$, $f_2 \in CAR(\Omega)$, a funkce f_1 a f_2 se rovnají skoro všude v Ω. Je pojem řešení pro ODR1 $x' = f_1(t, x)$ a ODR2 $x' = f_2(t, x)$ stejný nebo ne (tj. platí-li, že pokud $x(.)$ je řešení v Carathéodoryho smyslu rovnici ODR1, pak $x()$. je řešení ve smyslu Carathéodoryho rovnici ODR2 a naopak)?

Věta 16.1. *[Zobecněná Banachova věta.] Nechť Λ je metrický prostory, X je Banachův prostor. Nechť $\Phi : \Lambda \times X \to X$ je spojité vůči λ pro každé x pevné. Nechť (klíčový předpoklad uniformní kontrakce) existuje $\kappa \in (0, 1)$ takové, že*

$$\|\Phi(\lambda, x) - \Phi(\lambda, y)\|_X \leq \kappa \|x - y\|_X \qquad \forall \lambda \in \Lambda, x, y \in X. \tag{16.4}$$

Potom

I. *pro každé $\lambda \in \Lambda$ existuje právě jedno $x(\lambda) \in X$ takové, že $\Phi(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$,*

II. *zobrazení $\lambda \mapsto x(\lambda)$ je spojité,*

III. *$\|y - x(\lambda)\|_X \leq (1 - \kappa)^{-1} \|y - \Phi(\lambda, y)\|_X$ pro $\forall \lambda \in \Lambda, y \in X$.*

Důkaz. I. Vezmeme $\lambda \in \Lambda$ libovolné ale pevné a libovolné $x_0 \in X$. Definujme posloupnost bodů $x_{j+1} = \Phi(\lambda, x_j)$. Posloupnost $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ je Cauchyovská, jak plyne z

$$\|x_{j+1} - x_j\| = \|\Phi(\lambda, x_j) - \phi(\lambda, x_{j-1})\| \leq \kappa \|x_j - x_{j-1}\| \leq \ldots \leq \kappa^j \|x_1 - x_0\|$$

a z odhadu (pro $j < k$)

$$\|x_j - x_k\| \leq \sum_{p=j}^{k-1} \|x_p - x_{p+1}\| \leq \sum_{p=j}^{k-1} \kappa^p \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\kappa^j}{1 - \kappa} \|x_0 - x_1\|. \tag{16.5}$$

Pak existuje limita $\lim_{j\to\infty} x_j = x^*$.

Dále, je snadno ověřit, že

- $\Phi(\lambda, x^*) = x^*$ (opravdu, máme $x_{j+1} = \Phi(\lambda, x_j)$ a pokud pošleme $j \to \infty$, dostaneme $x^* = \Phi(\lambda, \lim_{j\to\infty} x_j$; zde používáme spojitost Φ vzhledem k druhé proměnné).
- jednoznačnost: pokud $y^* = \Phi(\lambda, y^*)$ je jiné řešení, pak $\|x^* - y^*\| = \|\Phi(\lambda, x^*) - \Phi(\lambda, y^*)\| \le \kappa\|x^* - y^*\|$, což vzhledem k tomu, že $0 < \kappa < 1$, je možné pouze v případě, že $\|x^* - y^*\| = 0$.

III. Použijeme odhad (16.5) s $j = 0$, a pošleme $k \to \infty$. Máme

$$\|x_k - x_0\| \le \frac{1}{1-\kappa}\|x_1 - x_0\|, \qquad \text{a pak} \quad \|x(\lambda) - x_0\| \le \frac{1}{1-\kappa}\|\Phi(\lambda, x_0) - x_0\|.$$

II. Vezmeme posloupnost parametrů λ_j konvergující k λ_0, tj. $\lambda_j \to \lambda_0$. Použijeme předchozí odhad s $x_0 = x(\lambda_0)$, $\lambda = \lambda_j$:

$$\|x(\lambda_j) - x(\lambda_0)\| \le \frac{1}{1-\kappa}\|\Phi(\lambda_j, x(\lambda_0)) - x(\lambda_0)\|$$

a pošleme $j \to \infty$. Pak $\Phi(\lambda_j, x(\lambda_0)) \to \Phi(\lambda_0, x(\lambda_0)) = x(\lambda_0)$ (zde jsme využili spojitost Φ vůči první proměnné), takže pravá strana konverguje k 0, a pak i levá strana konverguje k 0. □

Věta 16.2. *[Zobecněná Picardova věta.] Nechť $I = [0, T]$ je omezený interval, $I \times \mathbb{R}^n \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, funkce $f \in \mathrm{CAR}(\Omega)$ splňuje zobecněnou Lipšitzovskou podmínku: existuje $m \in L^1([0, T])$ tak, že*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le m(t)|x - y| \quad \textit{pro skoro všechny } t \in I \textit{ a všechny } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Pak pro $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ existje jediné Carathéodoryvské řešení diferenciální rovnice $x' = f(t, x)$ s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$, a navíc řešení závisí spojitě na počáteční podmínce v následujícím smyslu: $x_{0j} \to x_0$ implikuje $x_j(t) \rightrightarrows x(t)$ v I, kde x_j respektive x jsou řešení příslušná k x_{0j}, x_0.

Důkaz. Vezmeme ve Větě 16.1

$$\Lambda = \mathbb{R}^n = \{x_0 : \ x_0 \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{metrický prostor počátečních podmínek,}$$

pak Banachův prostor funkcí

$$X = C([0, T], \mathbb{R}^n)$$

s normou

$$\|f\|_X = \sup_{t\in[0,T]} |f(t)e^{-Lt}|,$$

kde $L > 0$ je zatím neznámá konstanta, kterou zvolíme pozdějí, a nakonec definujeme funkci

$$[\Phi(x_0, x(.))](t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)).$$

Ověřme, že Φ je spojité a že je kontrakce. Nechť $x, y \in X$, $x_0, y_0 \in \Lambda$ a označme $\widehat{x} = \Phi(x_0, x)$, $\widehat{y} = \Phi(y_0, y)$. Máme

$$\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t) = x_0 - y_0 + \int_0^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds,$$

$$|\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t)| \le |x_0 - y_0| + \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds \le$$

$$|x_0 - y_0| + \int_0^t m(s)|x(s) - y(s)|ds.$$

Dále, vynasobíme člen $x(s) - y(s)$ pomocí e^{-Ls} a odhadneme ho pomocí $\|x - y\|_X$:

$$|\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t)| \le |x_0 - y_0| + \int_0^t m(s)e^{Ls} \cdot \underbrace{e^{-Ls}|x(s) - y(s)|}_{\le\|x-y\|_X} ds$$

$$\le |x_0 - y_0| + \|x - y\|_X \cdot \int_0^t m(s)e^{Ls}ds.$$

Teď použijeme trik s teorie míry: funkci m lze zapsat jako $m(t) = m_1(t)+m_2(t)$, kde $\int_0^T |m_1(t)|dt \leq \frac{1}{3}$ a $|m_2(t)| \leq K$ pro $\forall t \in [0,T]$ pro nějaké $K > 0$. Vynasobíme našodhad e^{-Lt}. Pak

$$e^{-Lt}|\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t)| \leq |x_0 - y_0| \underbrace{e^{-Lt}}_{\leq 1} + \|x-y\|_X \cdot \underbrace{\int_0^t |m_1(s)| \underbrace{e^{L(s-t)}}_{\leq 1} ds}_{\leq \frac{1}{3}} + \|x-y\|_X \cdot \underbrace{\int_0^t \underbrace{|m_2(s)|}_{\leq K} e^{L(s-t)} ds}_{\leq \frac{K}{L}}.$$

Zvolíme teď $L = 3K$, a vezmeme supremum levé strany přes všechny t (pravá strana na t už nezávisí).

$$\|\Phi(x_0, x(.)) - \Phi(y_0, y(.))\|_X \leq |x_0 - y_0| + \frac{2}{3}\|x(.) - y(.)\|_X.$$

Odsud dostáváme spojitost, a vezmeme-li $y_0 = x_0$, dostáváme kontrakce.

Spojitá závislost na počáteční podmínce pak plyne z vlastnosti II Věty 16.1. □

Příklad. Lineární rovnice

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{16.6}$$

kde $A(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ jsou L^1 funkce. Zřejmě předpoklady Věty 16.2 jsou splněny (volme $\ell(t) = \|A(t)\|$).