15 Poincaré-Bendixsonova teorie.

Druhým nejjednodušším typem řešení po stacionárních řešeních jsou periodická řešení. Otázka možného počtu izolovaných periodických řešení je tématem 16. Hilbertova problému, což je obecně stále otevřený problém. V této kapitole se zabýváme otázkou existence periodických řešení v $\mathbb{R}^2$.
Upozornění: výsledky této kapitoly neplatí pro $\mathbb{R}^n$ s $n \geq 3$.

Tato kapitola se zabývá výlučně hladkými, rovinnými dynamickými systémy. Přesněji řečeno, platí následující

Úmluva. V celé kapitole $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast (tj. otevřená, souvislá množina), $f(x) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 a $\varphi = \varphi(t, x)$ je dynamický systém, příslušný k rovnici (13.1). Předpokládáme, že $\varphi(t, x)$ je definováno pro každé $t \geq 0$ a $x \in \Omega$.

Opakování. Množina γ se nazve *křivka*, jestliže $\gamma = \psi([a, b])$, kde ψ je spojité a prosté v $[a, b]$. Pokud ψ je spojité v $[a, b]$, prosté v $[a, b)$ a $\psi(a) = \psi(b)$, nazývá se $\gamma = \psi([a, b])$ *Jordanova křivka.*

Zřejmě (periodický) orbit, přesněji množina $\{\varphi(t, x_0) : \ t \in [a, b]\}$ je (Jordanova) křivka.

Jordanova věta: V rovině platí *Jordanova věta*: je-li $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka, pak disjunktně $\mathbb{R}^2 = \Omega_1 \cup \gamma \cup \Omega_2$, kde Ω_j jsou oblasti, Ω_1 je omezená, Ω_2 je nomezená.

Definice. Úsečka[2] $\Sigma \subset \Omega$ se nazývá *transverzála*, pokud pro každé $p \in \Sigma$ platí, že vektor $f(p)$ není rovnoběžný se Σ v bodě p.

Názorně: řešení protínají transverzálu pod nenulovým úhlem (a nutně v tomtéž směru). Zřejmě každým nestacionárním bodem lze vést nějakou transverzálu.

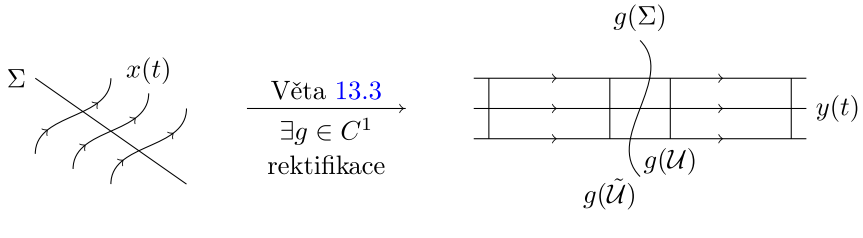
Lemma 15.1. *["o flow-boxu"] Nechť $\Sigma \subset \Omega$ je transverzála, $p \in \Sigma$. Potom existují $\mathcal{U} \supset \widetilde{\mathcal{U}}$ okolí bodu p a číslo $\Delta > 0$ takové, že každé řešení, splňující $x(0) \in \widetilde{\mathcal{U}}$:*

I. neopustí $\mathcal{U}$ v žádném čase $|t| < \Delta$, a

II. protne $\Sigma \cap \widetilde{\mathcal{U}}$ v nějakém čase $|t| < \Delta/2$.

Poznámka. Klíčovou ideou předchozího lemmatu je konstrukce tzv. "flow-boxu", což je (C^1-deformovaný) "obdélník" obsahující p, jehož hranici tvoří dvojice řešení (protínajících Σ) a dvojice transverzál (rovnoběžných se Σ).

Důkaz obrázkem. Podle Věty 13.3 existuje rektifikace g třídy C^1, která převadí křivočaré trajektorie na přímočaré trajektorie. Pro přímočaré trajektorie vezmeme oblast $g(\widetilde{\mathcal{U}})$ s délkou pětkrát delší, než je délka oblasti $g(\mathcal{U}) \subset g(\tilde{\mathcal{U}})$.



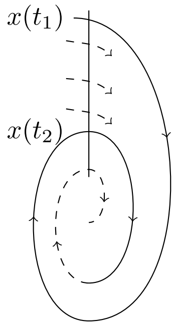
Lemma 15.2. *["o monotónní posloupnosti"] Nechť $\Sigma \subset \Omega$ je transverzála, nechť $p \in \Omega$. Potom průsečíky $\gamma^+(p)$ a Σ tvoří monotónní posloupnost. Podrobněji: pokud $t_1 < t_2 < t_3$ a $\varphi(t_i, p) \in \Sigma$, tak buď*

I. $\varphi(t_1, p) = \varphi(t_2, p) = \varphi(t_3, p)$, nebo

II. bod $\varphi(t_2, p)$ leží striktně uvnitř úsečky s krajními body $\varphi(t_1, p)$ a $\varphi(t_3, p)$.

[2]Tj. křivka s afinní parametrizací.

Důkaz: obrázkem. Vezmeme Jordanovu křivku γ tvořenou křivkou $x(.)$ pro časy $t \in [t_1, t_2]$ a přímočarou úsečkou spojující bod $x(t_1)$ s bodem $x(t_2)$, tj. $\gamma = \{x(t) : t \in [t_1, t_2]\} \cup [x(t_1), x(t_2)]$. Nechť Ω_1 je omezená oblast ohraničena Jordanovou křivkou γ. Body $x(t)$ s časy $t \in (t_2, t_3)$ leží v oblasti Ω_1 a kdyby bod $x(t_3)$ ležel na úseku $[x(t_1), x(t_2)]$, pak by pro $t > t_3$ bod $x(t)$ opustil by oblast Ω_1, což bylo by v rozporu s definici transverzály (opravdu, někdy mezi body $x(t_3)$ a $x(t_1)$ našli bychom bod $x(t)$, ve kterém transverzála Σ není kolma s $x'(t) = f(t)$).



□

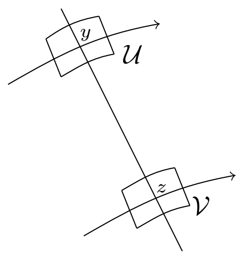
Lemma 15.3. *Nechť $\Sigma \subset \Omega$ je transverzála, nechť $p \in \Omega$. Potom $\omega(p) \cap \Sigma$ obsahuje nejvýše jeden bod.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že jsou dva body $y \neq z$ ležicí v průniku ω-limitní množiny $\omega(p)$ a transverzály Σ, tj. $y, z \in \omega(p) \cap \Sigma$.

Z definice ω-limitní množiny najdeme posloupnosti časů t_k, s_k tak, že $x(t_k) \to y, x(s_k) \to z$. Bez újmy na obecnost můžeme předpokladat, že $t_k < s_k < t_{k+1}$ pro všechny $k \in \mathbb{N}$.

Z lemmy 15.1 o flow-boxu existují okolí $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ bodů y, z, $\overline{\mathcal{U}} \cap \overline{\mathcal{V}} = \emptyset$, tak, že pokud $x(t_k)$ leží v $\mathcal{U}$, pak existuje čas t'_k blízko t_k takový, že $x(t'_k)$ leží na transverzále Σ. Podobně $x(s'_k) \in \Sigma \cap \mathcal{V}$.

Z blízkosti t_k a t'_k, resp. s_k a s'_k máme, že $t'_k < s'_k < t'_{k+1}$. To je ale spor s lemmou 15.2 o monotónní posloupnosti.



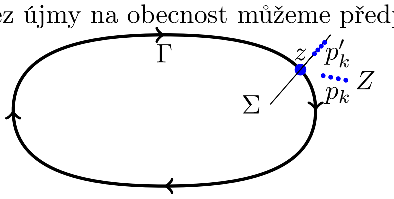
□

Věta 15.1. *[Poincaré-Bendixson.] Nechť pro $p \in \Omega$ je $\gamma^+(p)$ relativně kompaktní v Ω a nechť $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod. Potom $\omega(p) = \Gamma$, kde Γ je orbit (netriviálního) periodického řešení.*

Důkaz. Víme, že $p \in \Omega$, že $\overline{\gamma^+(p)}$ je kompaktní a že $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod. Chceme dokázat, že $\omega(p) = \Gamma$ je periodický orbit. Zvolme nějaký $q \in \omega(p)$ (podle Věty 13.1, $\omega(p) \neq \emptyset$).

Krok 1. Dokážeme, že $q \in \Gamma$, kde Γ je nějaký periodický orbit. Máme, že $\omega(q) \subset \omega(p)$. Zvolme libovolně $x_0 \in \omega(q)$ a provedeme přes něj nějakou transverzálu Σ, tj. $x_0 \in \Sigma$ (to můžeme udělat, protože $x_0 \in \omega(q) \subset \omega(p)$ a $\omega(p)$ neobsahuje stacionární bod, a pak x_0 není stacionární bod). Z definice ω-limitní množiny najdeme posloupnost časů $t_k \to \infty$ takovou, že $\varphi(t_k, q) \to x_0$. Pro dostatečně velké t_k (tj. pro $k \geq k_0$ pro nějaký k_0) z lemmy 15.1 o flow-boxu plyne, že existují časy t'_k blízko t_k takové, že $\varphi(t'_k, q) \in \Sigma$. Pak z lemmy 15.3 plyne, že $\varphi(t'_k) = \varphi(t'_{k+1})$ pro všechny $k \geq k_0$. Tedy $x_0 = \varphi(t'_k, q), k \geq k_0$, a pak $\gamma^+(q) = \gamma(q) =: \Gamma$ je periodický orbit (také máme, že $t'_{k+1} - t'_k = t'_{k+2} - t'_{k+1}$ pro $k \geq k_0$, ale to nepotřebujeme). Je lehce rozmyšlet, že $\omega(q) = \gamma(q) = \gamma^+(q)$.

Krok 2. Chceme dokázat, že $\omega(p) = \Gamma$, neboli že $\omega(p)$ neobsahuje nic jiného než Γ. Pro spor předpokladejme, že množina $Z := \omega(p) \setminus \Gamma \neq \emptyset$ není prázdná. Množina $\omega(p)$ je souvisla, pak její části Γ a Z nejsou odděleny. Pak existuje posloupnost bodů $p_k \in Z$ taková, že $\operatorname{dist}(p_k, \Gamma) \to 0$ pro $k \to \infty$. Bez újmy na obecnost můžeme předpokládát, že $p_k \to z \in \Gamma$.



Z lemmy 15.3 o flow-boxu plyne, že pro dostatečně velké indexy k existují body $p'_k \in \gamma(p_k)$ blízko bodů p_k tak, že $p'_k \in \Sigma$. Na jinou stranu, $p'_k \in \omega(p)$ (opravdu, $p_k \in Z \subset \omega(p)$ a z invariantnsoti *omega*-limitní množiny plyne, že $\gamma(p_k) \subset Z$), a pak z lemmy 15.3 o jedinečnosti průsečiku plyne, že protože $x_0 \in \Gamma \subset \omega(p)$ a $x_0 \in \Sigma$, pak $p'_k = x_0$. Ale odsud $p_k \in \gamma(p'_k) = \gamma(x_0) = \Gamma$, spor s volbou $p_k \in Z$. □

Věta 15.2. *[Bendixson-Dulac.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je navíc jednoduše souvislá a nechť existuje C^1 funkce $B(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že $\operatorname{div}(Bf)(x) > 0$ skoro všude v Ω. Potom rovnice (13.1) nemá v Ω (netriviální) periodické řešení.*

Věta 15.3. [3] *Nechť φ dynamický systém v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má nejvýše konečný počet stacionárních bodů. Potom pro každé $p \in \Omega$ je $\omega(p)$ buď*

I. *jednobodová, nebo*

II. *periodický orbit, nebo*

III. *konečná množina stacionárních bodů + sjednocení orbitů, tyto body spojujících.*

Příklad na použití Poincaré-Bendixsonovy věty. Uvažujme soustavu

$$\begin{cases} x' = x - y - x^3, \\ y' = x + y - y^3. \end{cases}$$

Pro funkci $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ máme

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = x(x - y - x^3) + y(x + y - y^3) = x^2 + y^2 - (x^4 + y^4)$$

což je menší než nula pro velké $R^2 = x^2 + y^2$. Pak $\omega(p)$ je relativně kompaktním (tj. omezeným) pro libovolný bod $p \in \mathbb{R}^2$.

Zijistíme existenci stacionárních bodů. Zřejmě $(0, 0)$ je stacionární bod. Ověřme, že nejsou žádne jiné. Vynásobením první rovnice $-y$ (relativně x), druhé rovnice x (relativně y) a sečtením dostaneme $x^2 + y^2 + x^3y - xy^3 = 0$ a relativně $x^2 + y^2 - (x^4 + y^4) = 0$. Odsud $x^3y - xy^3 + x^4 + y^4 = 0$ nebo $z^4 + z^3 - z + 1 = 0$ pro $z = \frac{x}{y}$. Zvažováním případů $z > 1, z \in (0, 1), z \in (-1, 0), z < -1$, najdeme, že ten polynom nemá reálné řešení.

Dále, linearizace v počátku vede na matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, která má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, tj. $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$, odkud plyne, že $(0, 0) \notin \omega(p)$ (toto můžeme zjistit i přímo z derivaci $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t))$, která je kladná pro malé $x^2 + y^2$).

Předpoklady Poincaré-Bendixsonovy věty jsou ověřeny, pak existuje periodické řešení.

[3] Bez důkazu.