14 La Salleho princip invariance

Opakování. Mějme otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ a rovnici (13.1) $x' = f(x)$. Nechť $x_0 \in \Omega$ je stacionární bod (ekvilibrium, singulární bod).

- bod x_0 je *stabilní*, pokud z toho, že $|x(0) - x_0|$ je malé, plyne že $|x(t) - x_0|$ zůstává malým pro včechny $t \geq 0$.
- bod x_0 je *asymptoticky stabilní*, pokud je stabilní a navíc $|x(t) - x_0| \to 0$ pro $t \to +\infty$.

Věta o asymptotické stabilitě (nestabilitě): definujme matici $A = \nabla f(x_0)$. Potom

- pokud $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0$, pak x_0 je asymptoticky stabilní;
- pokud $\exists \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0$, pak x_0 je nestabilní.

Ta věta nepokrývá ale všechny možnosti. Další nástroj na určení stability je Ljapunovská funkce: bez újmy na obecnost $x_0 = 0$, $\mathcal{U}$ je okolí 0, $V(x) : \mathcal{U} \to [0, +\infty)$ je spojitá funkce splňující

1. $V(0) = 0$ a $V(x) > 0$ pro $x \in U \setminus \{0\}$ (je pozitivní definitní);
2. zobrazení $t \mapsto V(x(t))$ je nerostoucí pro všechny $x(t)$ řešení rovnice (13.1) v $\mathcal{U}$.

Potom

- pokud existuje ljapunovská funkce, pak bod x_0 je stabilní;
- pokud existuje ljapunovská funkce V a její orbitální derivace $\dot{V}$ je negativně definitní na $\mathcal{U}$, pak bod x_0 je asymptoticky stabilní. Zde orbitální derivace je definováná takto:

Definice. Pro C^1 funkci $V : \Omega \to \mathbb{R}$ definujeme *orbitální derivaci* (vzhledem k systému (13.1)) jako

$$\dot{V}_f(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f_j(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Platí: $\dot{V}_f \leq 0$ v Ω, právě když pro libovolné řešení $x(t)$ rovnice (13.1) v Ω je $t \mapsto V(x(t))$ nerostoucí funkce.

Příklad. Tlumené kmitání kyvadla se dá popsat pomocí rovnice

$$x'' + q(x') + \sin(x) = 0,$$

kde q je tlumení, $q(0) = 0$, $q(y)y > 0$ pro $y \neq 0$, a x je odchylka od ekvilibria (rovnováhy). Pro malé odchylky x můžeme $\sin x$ nahradit x, dostaneme pak rovnici $x'' + q(x') + x = 0$.

Linearizace. Převedeme tuto rovnici na soustavu rovnic prvního řádu,

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - q(y). \end{cases}$$

Za předpokladu hladkosti funkce q gradient se rovná

$$\nabla f(x, y)|_{x=0,y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -q'(y) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0,y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix},$$

kde $a = -q'(0) \geq 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda(\lambda - a) + 1 = 0$, a vlastní čísla (hodnoty) jsou $\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-1 + \frac{a^2}{4}}$. Odsud, na základě linearizace, přijdeme k následujícímu závěru:

- pokud $a < 0$, pak máme asymptotickou stabilitu,
- pokud $a = 0$, nic nevíme.

Ljapunovská funkce 1. Definujme $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, pak $\dot{V} = xx' + yy' = -yq(y) \leq 0$, což je nekladné, ale není negativní definitní funkce (opravdu, může se rovnat 0 pro nenulové dvojice $(x \neq 0, y = 0)$). Takže máme stabilitu, ale nemůžeme nic říct o asymptotické stabilitě.

Ljapunovská funkce 2. Úpravíme předchozí funkci, $V_2(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \varepsilon xy$, s nějakým malým ε. Spočteme orbitální derivaci': $\dot{V}_2 = xx' + yy' + \varepsilon(x'y + xy') = -\big((q(y) - \varepsilon y)y + \varepsilon x^2 + \varepsilon xq(y)\big)$. Za předpokladu dostatečné hladkosti funkce q, rozvinutím funkce q v Taylorův rozvoj v nulovém bodě lze úkazat, že orbitální derivace $\dot{V}_2$ pro dostatečné malé $\varepsilon > 0$ je negativně definitní na nějakém okolí nuly, pak získáváme asymptotickou stabilitu nulového řešení.

Avšak dalším nástrojem, který občas můžeme použít ke zkoumání stability, je následující La Salleova věta.

Věta 14.1. *[La Salle.] Nechť (φ, Ω) je dynamický systém, určený rovnicí (13.1). Nechť existuje funkce $V(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ třídy C^1, zdola omezená a konstanta $\ell > 0$ takové, že množina*

$$\Omega_\ell = \{x \in \Omega : \ V(x) < \ell\}$$

je omezená a nechť konečně $\dot{V}_f \le 0$ v Ω_ℓ. Označme dále

$$R = \left\{x \in \Omega_\ell : \ \dot{V}_f = 0\right\}, \qquad M = \{y \in R : \ \gamma(y) \subset R\}.$$

Potom pro každé $x_0 \in \Omega_\ell$ je $\omega(x_0) \subset M$.

Komentář. M je největší invariantní podmnožina R. Závěr (s ohledem na Větu 13.2 výše) říká, že každé řešení v Ω_ℓ se blíží k M pro $t \to +\infty$. V aplikacích často M je jednobodová a La Salle princip zaručuje asymptotickou stabilitu v situacích, kdy nelze použít ani princip linearizace, ani Ljapunovskou funkci.

Použití La Salleové věty na tlumené kmitání. Pořád máme funkci $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a orbitální derivaci $\dot{V} = -q(y)y$. Vezmeme dále konstantu $\ell = \frac{1}{2}$, pak množina Ω_ℓ je kružnice o poloměru 1 se středem v počátku, $\Omega_\ell = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\right\}$. Množina $R = \{(x, y = 0) : \ -1 < x < 1\}$, a jen bod $(0, 0)$ dává řešení která zůstávají v R, takže $M = \{(0, 0)\}$. La Salleova věta nám říká, že bod $(0, 0)$ je jediným ω-limitním bodem, což na základě stability implikuje asymptotickou stabilitu.

Důkaz La Salleovy věty. Krok 1. Nechť $x_0 \in \Omega_l$. Označme $x(t) = \varphi(t, x_0)$ řešení s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$. Máme $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}_f(x(t)) \le 0$, pak $V(x(t)) \le V(x(0)) < \ell$, z čehož plyne, že $x(t) \in \Omega_\ell$ pro $\forall t \ge 0$, neboli $x(t)$ neopustí množinu Ω_l. Dále, $V(x(t))$ je klesající funkce a $V(.)$ je zdola omezená, z čehož plyne že existuje konečná limita pro t jdoucí k plus nekonečnu,

$$\exists \lim_{t \to +\infty} V(x(t)) = c \in \mathbb{R}.$$

Teď, pro každý ω-limitní bod $y \in \omega(x_0)$ existuje posloupnost časů $t_j \to +\infty$ taková, že $x(t_j) \to y$, a pak z Heiného věty a ze spojitosti funkce V dostáváme, že

$$c = \lim_{t \to +\infty} V(x(t)) = \lim_{j \to \infty} V(x(t_j)) = V(y),$$

což znamená, že funkce V je konstantní na celém $\omega(x_0)$.

Krok 2. Nechť $y_0 \in \omega(x_0)$ je nějaký ω-limitní bod bodu x_0. Označme $y(t) = \varphi(t, y_0)$ řešení s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$. Množina $\omega(x_0)$ je invariantní, pak celá trajektorie $\gamma(y_0)$ leží v $\omega(x_0)$, tj. $\gamma(y_0) \subset \omega(x_0)$. Z kroku 1 plyne, že $\forall \tau \in \mathbb{R}$ je $V(y(\tau)) = c$ a tudíž $\frac{d}{d\tau}V(y(\tau)) = \dot{V}_f(y(\tau)) = 0$. Takže ukázali jsme, že $y(\tau) \in R$ a pak $y_0 \in M$. □

[???: 4] **Poznámka.** Proč pro nějakou trajektorii $x(.)$ nemůže nastat situace znázorněná na obrázku? V tom případě by bylo $-1 = \dot{V}_f(x(t_j)) \xrightarrow[j \to \infty]{} \dot{V}_f(y_0)$, a pak by y_0 neleželo ani v množině R.