13 Úvod do dynamických systémů

Definice. *Dynamickým systémem* (d.s.) rozumíme dvojici (φ, Ω), kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi = \varphi(t, x) : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ je zobrazení, splňující

I. $\varphi(0, x) = x$ pro $\forall x \in \Omega$,

II. $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$ pro $\forall s, t \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ (semigrupová vlastnost),

III. $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ je spojité.

V uvedené definici může být Ω libovolný topologický prostor; nás však budou zajímat výlučně hladké dynamické systémy v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kde Ω je otevřená množina.

Poznámka. V definici dynamického systému předpokládáme, že $\varphi(., x_0)$ existuje pro všechny časy $t \in \mathbb{R}$. Tuto definici lze zobecnit tak, že pro každý x_0 můžeme vyžadovat jen nějaký interval časů $(t_1(x_0), t_2(x_0))$, pro které $\varphi(., x_0)$ je definováno.

Příklad. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f = f(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ třídy C^1, pak $\varphi(t, x_0) := x(t)$, kde $x = x(t)$ je řešení úlohy

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0 \tag{13.1}$$

je dynamický systém třídy C^1. Tento příklad je kanonický v tom smyslu, že naopak každý hladký d.s. v $\mathbb{R}^n$ vznikne jako "řešicí funkce" jisté rovnice typu (13.1).

Příklad. Uvažujme rovnici $x' = x^2$ s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 > 0$. Vydělíme obě strany x^2 a zintegrujeme:

$$\int_0^t \frac{x'(t)dt}{x(t)^2} = \int dt; \qquad \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t; \qquad x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Definujeme dynamický systém

$$\varphi : (t, x_0) \mapsto \frac{x_0}{1 - t x_0}, \; t x_0 < 1.$$

Zkontrolujeme semigrupovou vlastnost:

$$\varphi(s, \varphi(t, x_0)) = \frac{\varphi(t, x_0)}{1 - s\varphi(t, x_0)} = \frac{\frac{x_0}{1 - t x_0}}{1 - s\frac{x_0}{1 - t x_0}} = \frac{x_0}{1 - (t + s) x_0}.$$

Příklad. Uvažujme soustavu $x' = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je konstantní matice. Řešicí funkce je $\varphi(t, x_0) = e^{At} x_0$, semigupová vlastnost je výsledkem rovnosti $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$.

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Pro $x_0 \in M$ definujeme

- *pozitivní orbit (dopředný orbit)* $\gamma^+(x_0) = \{\varphi(t, x_0) : \; t \geq 0\}$,
- *negativní orbit (zpětný orbit)* $\gamma^-(x_0) = \{\varphi(t, x_0) : \; t \leq 0\}$,
- *orbit (úplný orbit)* $\gamma(x_0) = \{\varphi(t, x_0) : \; t \in \mathbb{R}\}$.

Definice. Množina $M \subset \Omega$ se nazve

- *pozitivně (dopředně) invariantní,* jestliže $\varphi(t, x) \in M$ pro $\forall t \geq 0, x \in M$ (jinými slovy, pokud $\forall x_0 \in M : \gamma(x_0) \in M$),
- *negativně (zpětně) invariantní,* jestliže $\varphi(t, x) \in M$ pro $\forall t \leq 0, x \in M$ (jinými slovy, pokud $\forall x_0 \in M : \gamma^+(x_0) \in M$),
- *(úplně) invariantní,* jestliže $\varphi(t, x) \in M$ pro $\forall t \in \mathbb{R}, x \in M$ (jinými slovy, pokud $\forall x_0 \in M$: $\gamma(x_0) \in M$).

Jednoduchá pozorování: pozitivní/negativní/úplný orbit je pozitivně/negativně/úplně invariantní. Množina M je pozitivně/negativně/úplně invariantní, právě když pro každé $x_0 \in M$ je $\gamma^+(x_0)$ resp. $\gamma^-(x_0)$ resp. $\gamma(x_0)$ částí M.

Definice. Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Definujeme *ω-limitní množinu* bodu $x_0 \in \Omega$ jako

$$\omega(x_0) = \{y \in \Omega : \ \exists t_k \to +\infty \ \text{ t.ž. } \varphi(t_k, x_0) \to y\}\,.$$

Podobně definujeme *α-limitní množinu* jako

$$\alpha(x_0) = \{y \in \Omega : \ \exists t_k \to -\infty \ \text{ t.ž. } \varphi(t_k, x_0) \to y\}\,.$$

Poznámka. Lehce se nahlédne, že

$$y \in \omega(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \forall T > 0 \ \exists t \geq T : \ |y - \varphi(t, x_0)| < \varepsilon,$$

tedy

$$y \in \Omega \setminus \omega(x_0) \iff \exists \varepsilon > 0 \ \exists T > 0 \ \forall t \geq T : \ |y - \varphi(t, x_0)| \geq \varepsilon,$$

neboli $\omega(x_0)$ obsahuje v tomto smyslu právě všechny body, které jsou významné pro $\varphi(t, x_0)$ pro velká $t > 0$.

Lemma 13.1. $\omega(x_0) = \bigcap_{\tau > 0} \overline{\gamma^+(\varphi(\tau, x_0))}$, $\qquad \alpha(x_0) = \bigcap_{\tau < 0} \overline{\gamma^-(\varphi(\tau, x_0))}$.

Důkaz. Stačí provést důkaz pro ω, pro α je to podobné.

"$\subset$". Nechť $y \in \omega(x_0)$, pak chceme ukázat, že pro každý $\tau > 0$ platí, že $y \in \overline{\gamma^+(\varphi(\tau, x_0))}$. Všimněme si, že

$$\gamma^+(\varphi(\tau, x_0)) = \{s \geq 0 : \ \varphi(s, \varphi(\tau, x_0))\} = \{s \geq 0 : \varphi(s + \tau, x_0)\} = \{s \geq \tau_0 : \varphi(s, x_0)\}\,.$$

Z definice ω-limitní množiny máme, že $\exists t_k \to \infty$ taková, že $\varphi(t_k, x_0) \to y$. Nechť $\tau > 0$ je libovolné pevné číslo. Pak začínající z nějakého indexu, všechny prvky posloupnosti t_k jsou větší než τ a potom $\varphi(t_k, x_0)$ leží v $\gamma^+(\varphi(\tau, x_0))$, a pak limitní bod posloupnosti $\varphi(t_k, x_0)$ lezí v uzávěru $\gamma^+(\varphi(\tau, x_0))$. Máme dokázáno inkluzi.

"$\supset$". Nechť $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že $y \in \overline{\gamma^+(\varphi(k, x_0))} = \overline{\{s \geq k : \ \varphi(s, x_0)\}}$. Pak $\exists t_k \geq k$ takový, že $\rho(\varphi(t_k, x_0), y) \leq \frac{1}{k}$ (zde, ρ je vzdálenost), z čehož plyne, že $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(t_k, x_0) = y$, neboli $y \in \omega(x_0)$. Máme dokazanou druhou inkluzi, což dokončuje důkaz. $\square$

Poznámka. Připomeňme, že množina M je *souvislá*, jestliže *neexistují* disjunktní otevřené množiny $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ takové, že $M \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$, přičemž $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Dále platí, že interval je souvislá množina, a spojitý obraz souvislé množiny je opět souvislá množina.

Věta 13.1. *[Vlastnosti $\omega(x_0)$.] Nechť (φ, Ω) je dynamický systém, $x_0 \in \Omega$. Potom*

1. *$\omega(x_0)$ je uzavřená a invariantní,*
2. *je-li $\gamma^+(x_0)$ relativně kompaktní, je $\omega(x_0)$ neprázdná, kompaktní a souvislá.*

Důkaz.

1. Z lemmy 13.1 plyne, že $\omega(x_0)$ je uzavřená (jako průnik uzavřených množin). Dále, podívejme se na invariantnost. Nechť $y \in \omega(x_0)$ a $\tau \in \mathbb{R}$. Chceme zjistit, zda $\varphi(\tau, y)$ leží v $\omega(x_0)$. Máme
$$\exists t_k \to +\infty : \quad \varphi(t_k, x_0) \to y.$$
Dále,
$$\varphi(t_k + \tau, x_0) = \varphi(\tau, \varphi(t_k, x_0)) \xrightarrow[k \to \infty]{[\text{spojitost } \varphi]} \varphi(\tau, y),$$
neboli na posloupnosti $\{t_k + \tau\}_{k=1}^{\infty}$ funkce $\varphi(., x_0)$ konverguje k $\varphi(\tau, x_0)$, pak $\varphi(\tau, y) \in \omega(x_0)$.

2. relativní kompaktnost $\gamma^+(x_0)$ v $\mathbb{R}^n$ znamená, že její uzávěr je omezený. Totiž to znamená, že posloupnost $\{\varphi(t_k = k, x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ je relativně kompaktní, neboli že můžeme zvolit konvergentní podposloupnost, z čehož plyne že $\omega(x_0)$ je neprázdná množina. Dále, z omezenosti a uzavřenosti v $\mathbb{R}^n$ plyne kompaktnost $\omega(x_0)$.

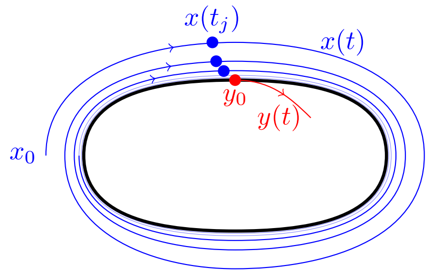
   Konečně, podívejme se na souvislost, což znamená, že pokud množina $\omega(x_0)$ leží v disjunktním sjednocenní dvou otevřených množin, jedna z těch množin musí být prázdná. Pro spor, předpokládejme že množina $\omega(x_0) \subset A \cup B$, A, B jsou otevřené a neprázdné. Zvolíme nějaké $y \in \omega(x_0) \cap A$ a $z \in \omega(x_0) \cap B$. Můžeme tedy najít posloupnost $t_k \to \infty$ takovou, že $t_{2k} \in A$, $t_{2k+1} \in B$ (opravdu, najdeme posloupnost na které $\varphi(., x_0)$ konverguje k y. Ačkoli $y \in A$ a množina A je otevřená, pak začinající z nějakého indexu všechny prvky té posloupnosti budou ležet v A). Pak můžeme najit $t'_k \in (t_{2k}, t_{2k+1})$ takový, že $\varphi(t'_k, x_0) \in C := \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$. Množina C je uzavřená (jako doplněk otevřené množiny $A \cup B$), a pak z omezené množiny $\{\varphi(t'_k, x_0)\}_{k=1}^{\infty} \subset C$ můžeme vybrat konvergentní podposloupnost; její limita bude ležet v v $\omega(x_0)$ a v C (zde používáme kompaktnost $C \cap \omega(x_0)$), což je spor s definicemi množin A, B (s tím, že $\omega(x_0) \subset A \cup B$).

$\square$

[???: 1] Najít chybu v důkazu a nabídnout jak ji opravit.

Poznámka. Předpoklad relativní kompaktnosti je podstatný, viz obrázek: 

Komentář. Situace na obrázku nemůže nastat: pokud $y_0 \in \omega(x_0)$, pak celá trajektorie $\gamma(y_0)$ leží v $\omega(x_0)$, tj. $\gamma(y_0) \in \omega(x_0)$.



Věta 13.2. *Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Potom:*

1. $\omega(x_0) = \{z\}$ *, právě když* $\varphi(t, x_0) \to z$ *pro* $t \to +\infty$.
2. *obecněji, pro* $K \subset \Omega$ *kompaktní platí:* $\emptyset \neq \omega(x_0) \subset K$*, právě když* $\operatorname{dist}(\varphi(t, x_0), K) \to 0$ *pro* $t \to +\infty$.

Důkaz. [???: 2] Důkaz je úloha na zápočet. □

Definice. Dynamické systémy (φ, Ω) a (ψ, Θ) nazveme *topologicky konjugované*, jestliže existuje homeomorfismus $h : \Omega \to \Theta$ takový, že $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ pro každé $t \in \mathbb{R}, x \in \Omega$. Ekvivalentně, $\varphi(t, .) = h^{-1} \circ \psi(t, h(.))$ pro každé t.

Poznámka. Topologická konjugace zachovává *podstatné* rysy dynamických systémů: stacionární body a jejich stabilitu; periodické orbity; ω-limitní množiny, atd.

Poznámka. Existují obecnější definice topologické konjugace, pro které se časy v obou dynamických systémech nemusí shodovat.

Věta 13.3. *[O rektifikaci.] Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina,* $f \in C^1(\Omega)$, $\widehat{x} \in \Omega$, $f(\widehat{x}) \neq 0$. *Pak existuje* $\mathcal{V}$ *okolí* $\widehat{x}$, $\mathcal{W}$ *okolí* $0 \in \mathbb{R}^n$ *a difeomorfismus* $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *takový, že* $x(t)$ *je řešení rovnice* (13.1) *ve* $\mathcal{V}$*, právě když* $y(t) = g(x(t))$ *je řešení rovnice*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13.2}$$

ve $\mathcal{W}$*. Jinými slovy, dynamické systémy určené rovnicemi* (13.1) *a* (13.2) *jsou na příslušných okolích topologicky (dokonce C^1) konjugované.*

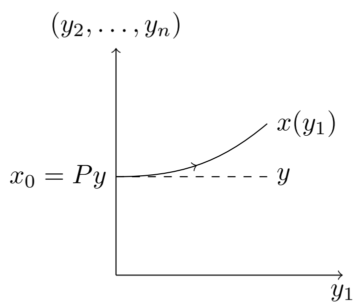
Důkaz. Označme φ a ψ respektive řešicí funkce přislušné rovnicím (13.1), (13.2).

Krok 1. Bez ujmy na obecnost $\widehat{x} = 0$ a $f_1(0) \neq 0$. Zvolíme dostatečně malé okolí $\mathcal{W}$ bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ a definujme

$$G : \mathcal{W} \ni (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto \varphi(y_1, (0, y_2, \ldots y_n)),$$

a označme $\mathcal{V} = G(\mathcal{W})$.

Takže, $G(y_1, y_2, \ldots, y_n) = x(y_1)$, kde $x(.)$ je řešení (13.1) odpovídající počáteční podmínce $x(y_1 = 0) = x_0 = (0, y_2, \ldots, y_n)$.



Krok 2. Najdeme $\nabla G(0)$. Máme

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_1}\right|_{y=0} = f(x(y_1))|_{y=0} = f(0).$$

Tady jsme použili, že $\varphi(.,x_0)$ je řešení (13.1) a tedy $\frac{\partial\varphi(t,x_0)}{\partial t} = f(\varphi(t,x_0))$.

Dále,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y_k}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial G(0,y_2,\dots,y_n)}{\partial y_k}\right|_{y=0} = \left.\frac{(0,y_2,\dots,y_n)^T}{\partial y_k}\right|_{y=0} = e_k,$$

kde e_k je jednotkový vektor s 1 na k-té pozici a 0 na ostatních pozicích. Máme, že

$$\nabla G(0) = \begin{pmatrix} f_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

je regulární matice, pak z Věty o inverzní funkci existuje dostatečně malé $\mathcal{W}$ takové, že zúžení $G|\mathcal{W}$ je prosté zobrazení, a inverzní zobrazení G^{-1} je třídy C^1. Označme $g := G^{-1}$.

Krok 3. Zbývá ověřit topologickou konjugaci. Uděláme to ve 2 krocích: v tomto kroku ověříme, že pokud $y(t)$ je řešením (13.2), pak $x(t) := G(y(t))$ je řešením (13.1), a v příštím kroku ověříme opačnou implikaci.

Nechť $y(t)$ řeší (13.2), pak máme $y_1(t) = y_{01} + t$, $y_k(t) = y_{0k}$. Definujme $x(t) = G(y(t))$, totiž $y(t) := g(x(t))$.

Zderivujme $x(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dG(y(t))}{dt} = \frac{d\,\varphi\,(y_1(t),(0,y_2(t),\dots,y_n(t)))}{dt} &= f(\varphi\,(y_1(t),(0,y_2(t),\dots,y_n(t))))\cdot y_1'(t) \\ &= f(\varphi\,(y_1(t),(0,y_2(t),\dots,y_n(t)))) = f(G(y(t))) = f(x(t)).\end{aligned}$$

Krok 4. Nechť $x(t)$ řeší rovnici (13.1) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$. Definujme $y(t) := g(x(t))$. Pak $y(0) = g(x(0))$, avšak nevíme jestli $y(.)$ řeší (13.2) nebo ne. Místo přímého ověřování definujme $\widehat{y}$ jako řešení rovnice (13.2) s počáteční podmínkou $\widehat{y}(0) = g(x(0))$. Poté z kroku 3 víme, že funkce $\widehat{x}(t) := G(\widehat{y}(t))$ splňuje rovnici (13.1) a navíc v nulovém čase se rovná $\widehat{x}(0) = G(\widehat{y}(0)) = G(g(x(0))) = x(0)$. Vidíme, že funkce $x(.), \widehat{x}(.)$ řeší stejnou úlohu, a z jednoznačnosti pak se shodují, $x(t) \equiv \widehat{x}(t)$. Odsud máme, že $y(t) = g(x(t)) = g(\widehat{x}(t)) = \widehat{y}(t)$ řeší rovnici (13.2).

□

[???: 3] **Poznámka.** Krok 4 je těžko ověřit přímým výpočtem, který vede na

$$f(x(t)) = x'(t) = \frac{d}{dt}\varphi(y_1(t),(0,y_2(t),\dots,y_n(t))) = f(x(t))\cdot y_1'(t) + U(t)\cdot(0,y_2'(t),\dots,y_n'(t))^T,$$

kde $n\times n$ matice $U(t)$ je řešením rovnice ve variacích $U'(t) = \nabla f(x(t))\cdot U(t)$ s počáteční podmínkou $U(0) = I_{n\times n}$. Porovnáním levé a pravé strany dostaneme jen, že

$$f(x(t))\cdot(y_1'(t)-1) + U(t)\cdot(0,y_2'(t),\dots,y_n'(t))^T = 0,$$

z čehož není zřetelné, proč by mělo být $y_1'(t) = 1$, $y_k'(t) = 0$.

Poznámka. Předchozí věta znamená, že dynamika na okolí nestacionárních bodů není příliš zajímavá. Následující (již těžší) věta říká, že ani na okolí stacionárních hyperbolických bodů nevzniká zajímavá (tj. nelineární) dynamika.
Připomeňme, že stacionární bod rovnice (13.1) se nazývá *hyperbolický*, jestliže $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ pro každé λ ve spektru $A = \nabla f(x_0)$.

Věta 13.4. [1] *[Hartman-Grobmanova.] Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0, kde x_0 je hyperbolický stacionární bod rovnice* (13.1) *(neboli $f(x_0) = 0$ a všechny vlastní čísla matice $A := \nabla f(x_0)$ mají nenulovou reálnou část). Pak existuje $\mathcal{V}$ okolí x_0 a $\mathcal{W}$ okolí $0 \in \mathbb{R}^n$ taková, že dynamické systémy, určené rovnicemi* (13.1) *na $\mathcal{V}$ respektive $y' = Ay$ na $\mathcal{W}$, jsou topologicky konjugované.*

[1] Bez důkazu.