4. $x'' + ax' + x^2(5x^2+4x) = 0$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay - 4x^3 - 5x^4 \end{cases}$$

a) Hledame Ljapunovskou funkci ve tvaru $V(x,y) = bx^{2n} + cy^{2m}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = nbx^{2n-1}x' + mcy^{2m-1}y' \qquad \boxed{*}$$

$$= nbx^{2n-1}y + mcy^{2m-1}(-ay - 4x^3 - 5x^4)$$

Chceme aby $nbx^{2n-1}y - mcy^{2m-1} \cdot 4x^3 = 0$

tj. $n=2$, $m=1$ $\quad 2b - 4c = 0$, $c = \frac{1}{2}$, $b = 1$

potom $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + x^4$ a

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = -\frac{a}{2}y^2 - \underline{\frac{5}{2}x^4y}$ — není negativně definitní

b) v $\boxed{*}$ chceme zbavit ještě $mcy^{2m-1} \cdot (-5x^4)$.

Hledame V ve tvaru

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + x^4 + dx^5$$

$$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = y(-ay - 4x^3 - 5x^4) + (4x^3 + 5dx^4)y$$

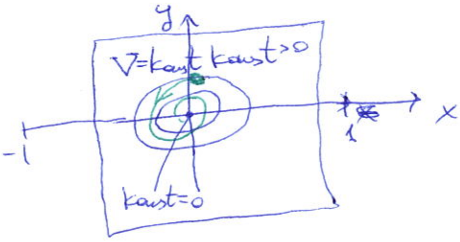
$$= -ay^2 + y(\underline{-4x^3} \underline{\underline{-5x^4}} \underline{+4x^3} \underline{\underline{+5 \cdot dx^4}})$$

vezmeme $d=1$, potom $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + x^4 + x^5$ a

$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = -ay^2 \le 0$.

Je $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + x^4 + x^5$ pozitivně definitní v nějaké oblasti? Ano, třeba v $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})_x \times (-1,1)_y$

Názorně: křivky $V(x,y) = \text{konst}$, pro malé konst, jsou uzavřené křivky obíhající kolem středa



vezmeme jako Ω vnitřek křivky $V(x,y) = k_1$, pro k_1 dost malé, tak, že $\Omega \subset (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})_x \times (-1,1)_y$.

Takže pro $a \ge 0$ máme stabilitu (nevíme, jestli máme asymptotickou stabilitu nebo ne).

Pro $a=0$ máme stabilitu a nemáme asymptotickou stabilitu (protože $V = \frac{1}{2}y^2 + x^4 + x^5$ je integrál, a pak řešení zůstane na uzavřené křivce $V = \text{konst}$).