1 Obyčejné diferenciální rovnice

MOTIVACE:

1. FYZIKA, kmitání pružiny
$$m \cdot x'' = -kx,$$
kde $m > 0$ hmotnost, $k > 0$ tuhost pružiny, x výchylka, x' rychlost, x'' zrychlení.

2. BIOLOGIE, model dravec - kořist, který popisuje vyvoj populaci.
$$\begin{cases} d' = \alpha dk - \beta d, \\ k' = \gamma k - \delta dk, \end{cases}$$
kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou nějaké kladné konstanty, d a k jsou dravec a kořist, (buď počet kusů, nebo celková hmotnost dravců a kořisti).

3. EKONOMIE
$$k' = \alpha k - c(t),$$
kde k je kapital, $\alpha > 0$ nějaká konstanta, $c(t) > 0$ funkce spotřeby.

Co nás zajímá na diferenciálních rovnicích?

1. Přesné řešení (často neumíme spočítat).
2. Existence a jednoznačnost řešení.
3. Jaké vlastnosti má řešení?

Příklady diferenciálních rovnic.

1. $\begin{cases} x' = 2xyt, \\ y' = 3x - y + t^2. \end{cases}$
2. $x'' + 3x'^2 x - 2\cos x = 0.$

PŘEDPOKLADY:
$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá. Budeme studovat systém rovnic

$$\boxed{x' = f(t, x) \qquad (1.1)}$$

<u>DEFINICE.</u> Funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení DR (1.1), jestliže

I. $\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in \Omega,$

II. $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,

III. $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(t, x(t))$.

KOMENTÁŘ: stačí jen třetí vlastnost, obsahuje v sobě implicitně první dvě.
POZNAMKA: Typicky (DR) má nekonečně mnoha řešení. Když přídáme počáteční podmínku, to (ve většíně příkladů) dostaneme jediné řešení.

Lemma 1.1 (o integrální formulaci)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $(t_0, x_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$ a $x : I \to \mathbb{R}^n$ spojitá a taková, že graf x leží v Ω. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

I. (x, I) *je řešení* (DR) *splňující počáteční podminku* $x(t_0) = x_0$.

II. $\forall t \in I, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$

Proof. Důkaz jednoduchý. □

Věta 1.1 (**Peanova, o lokální existenci, 1890**). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(t_0, x_0) \in \Omega$. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$, která je řešením* (DR) *a splňuje počáteční podminku $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz je založený na ARZELA-ASCOLÍHO VĚTĚ,

Věta 1.2 (**ARZELA-ASCOLI**). *Nechť $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ (K je kompakt) je množina stejně omezených a stejně spojitých funkcí. Pak M je relativně kompaktní v $C(K, \mathbb{R}^n)$ (se suprémovou normou).*

Připomínky.

- relativně kompaktní: uzávěr je kompaktní (z káždé posloupnosti dokážeme vybrat konvergentní podposloupnost).
- stejně spojitých: $\forall t \in K\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x(.) \in M\ \forall \tau \in K : \quad |t - \tau| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(\tau)| < \epsilon$.
- stejně omezených: $\exists D > 0\ \forall x(.) \in M\ \forall t \in K : \quad |x(t)| \le D \quad$ (nebo $\|x\|_\infty \le D$).

* stejnoměrná spojitost: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t, \tau \in K : \quad |t - \tau| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(\tau)| < \varepsilon$.

* stejná stejnoměrná spojitost: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x(.) \in M\ \forall t, \tau \in K : \ |t - \tau| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(\tau)| < \varepsilon$.

* funkce spojitá na kompaktu je stejnoměrně spojitá.

* posloupnost spojitých funkcí, stejnoměrně konvergujících k nějaké funkce, konverguje ke spojité funkce.

<u>Důkaz Peanovy věty.</u>
1. KROK. Dokážeme pomocné tvrzení,

"Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f omezená na Ω, pak $\forall T > 0$ existuje řešení (DR) *$x : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n$ spňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$."*

Krok 1.a) Řešme pomocnou úlohu

$$x_\lambda(t) = x_0 \text{ na } [t_0 - \lambda, 0]; \qquad x_\lambda(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_\lambda(s - \lambda), s) ds. \tag{P_λ}$$

Krok 1.b) Uvažujme množinu $M = \left\{ x_{1/n}|_{[t_0,T]} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Chceme dokázat, že tahle posloupnost se k něčemu bliží, a že to něco k čemu se blíží splňuje integrální rovnici. Odhadneme

$$|x_\lambda(t)| \le |x_0| + \|f\|_\infty |T - t_0| \qquad \text{(stejnoměrná spojitost)},$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(s)| = \left| \int_s^t f(x_\lambda(r - \lambda), r) dr \right| \le \|f\|_\infty |t - s| \quad \text{(Lipšitzovskost, pak stejnoměrná spojitost)}.$$

Podle Arzela-Ascolího věty, můžeme výbrat konvergentní podposloupnost $x_{n_k} \rightrightarrows x$.

Krok 1.c) Ukažeme, že funkce x řeší integrální rovnici. Víme, že (označme si $\lambda_k = \frac{1}{n_k}$)

$$\underbrace{x_{\lambda_k}(t)}_{\to x(t)} = \underbrace{x_0}_{\to x_0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(x_{\lambda_k}(s - \lambda_k), s) ds}_{???\to \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)}.$$

Uvažujme rozdíl mezí integrály a odhadneme

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(x_{\lambda_k}(s - \lambda_k), s) - f(x(s), s) ds \right| \le$$

$$\int_{t_0}^{t} |f(x_{\lambda_k}(s - \lambda_k), s) - f(x_{\lambda_k}(s), s)| \, ds + \int_{t_0}^{t} |f(x_{\lambda_k}(s), s) - f(x(s), s)| \, ds.$$

1. f je stejnoměrně spojitá: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x, s) - f(y, s)| < \varepsilon$.
2. stejná stejnoměrná spojitost: $\forall \delta > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ \forall l\ \forall s : \quad |x_l(s - \lambda_k) - x_l(s)| < \delta$.
   My to chceme s $l = \lambda_k$, takže máme $|x_l(s - \lambda_k) - x_l(s)| < \delta$.
3. stejnoměrná konvergence $x_{\lambda_k} \rightrightarrows x$: $\forall \delta > 0\ \exists k_1\ \forall k > k_1\ \forall s : \quad |x_{\lambda_k}(s) - x(s)| < \delta$.

Z 1) a 2) plyne odhad pro první integrál, z 1) a 3) plyne odhad pro druhý integrál.
Pak jsme ukazali, že x je řešení integrální rovnici a tím pádem i diferenciální rovnici.

Krok 2. Obecné f, Ω.

2 JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ.

DEFINICE Řekneme, že (DR) má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Mame-li 2 řešení (x, I), (y, J) a $t_0 \in I \cap J$ takové, že $x(t_0) = y(t_0)$, potom existuje $\delta > 0$, takové že $x(t) = y(t)$ $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Mame-li 2 řešení (x, I), (y, J) a $t_0 \in I \cap J$ takové, že $x(t_0) = y(t_0)$, potom platí, že $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I \cap J$.

Věta 2.1. *lokální jednoznačnost je ekvivalentní globální jednoznačnosti.*

DEFINICE Řekneme, že $f = f(t, x)$ je lokálně lipšitzovská (lipschitzovská) v Ω vzhledem k x, jestliže $\forall (t_0, x_0) \in \Omega\ \exists \delta > 0\ \exists L > 0 : \quad \forall t \in \mathcal{U}(t_0, \delta)\ \forall x, y \in \mathcal{U}(x_0, \delta) : \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$.

Věta 2.2. *Buď f lokálně lipšitzovská v Ω vzhledem k x. Pak (DR) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důsledek 2.3 (Lokální Picardova věta): Je-li f lokálně lipšitzovská vzhledem k x a $(t_0, x_0) \in \Omega$, pak $\exists \delta > 0$ takové, že (DR)+p.p. má právě jedno řešení.

Lemma 2.1. *Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jsou spojité v Ω pro $j = 1, 2, \ldots, n$ (značíme $f \in C^1(\Omega)$) pak f je v Ω lokálně lipšitzovská vzhledem k x.*

Důkaz: přes větu o střední hodnotě.

3 MAXIMALITA ŘEŠENÍ

DEFINICE: Řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ nazveme *prodloužením* řešení (x, I), jestliže $I \subset \tilde{I}$ a $\forall t \in I : \quad x(t) = \tilde{x}(t)$ (takže $x = \tilde{x}|_I$). Řešení je *maximální*, pokud nemá žádné netriviální prodloužení (různe od sebe sama).

Věta 3.1. *Nechť (x, I) je řešení (DR). Pak (x, I) má aspoň jedno maximální prodloužení.*

ZORNOVO LEMMA: Buď M libovolná neprázdná množina částečně uspořádaná relaci "$<$". Nechť každý řetězec v M je shora omezený. Pak v M existuje maximální prvek.

Lemma 3.1. *Buď (x, I) řešení (DR), $I = (a, b), b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b, právě když platí zároveň*

(I) $b < +\infty$,

(II) $\exists \lim\limits_{t \to b-} x(t)$ *(označme ji x_0), a*

(III) $(b, x_0) \in \Omega$.

Věta 3.2. *[O opuštění kompaktu] Buď (x, I) maximální řešení (DR). Nechť $K \subset \Omega$ je kompakt a $\exists t_0 \in I,\ (x(t_0), t_0) \in \Omega$.*
Pak

- $\exists t_1 > t_0,\ t_1 \in I$ *takové, že* $(t_1, x(t_1)) \notin K$, *a*
- $\exists t_2 < t_0,\ t_2 \in I$ *takové, že* $(t_2, x(t_2)) \notin K$.

4 Závislost řešení na počáteční podmínce a parametrech.

DEFINICE. Buď f v Ω lokálně lipšitzovská vzhledem k x. *Řešící funkcí* (DR) nazveme funkci $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ definovanou předpisem

$$\varphi(t; t_0, x_0) := x(t),$$

kde x je maximální řešení (DR) splňující $x(t_0) = x_0$.

Věta 4.1 (Gronwallowo lemma)**.** *Nechť g, w jsou spojité nezáporné funkce na I, $t_0 \in I$ a $K \geq 0$. Nechť $\forall t \in I$*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^{t} w(s)g(s) \right|.$$

Potom

$$w(t) \leq K \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} g(s) \right| \right).$$

Lemma 4.1. *Nechť f je globalně lipšitzovská vzhledem k x s konstantou L. Nechť x a y jsou dva řešení (DR) na I s p.p. $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Pak $\forall t \in I$*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|}.$$

Věta 4.2. *Za předpokladů předchozí definice (f je lokalně lipšitzovská) nechť*

$$G = \left\{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2} : \ \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno} \right\}.$$

Pak G je otevřena a φ je spojitá v G.

Věta 4.3. *Buď f je třídy C^1 vzhledem k x a φ buď řešici funkce (DR). Potom $\forall (t, t_0, x_0) \in G$ a $\forall w \in \mathbb{R}^n$ existuje derivace φ podle x_0 ve směru w v bodě (t, t_0, x_0), tj.*

$$D_w \varphi(t; t_0, x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t; t_0, x_0 + h \cdot w) - \varphi(t; t_0, x_0)}{h}.$$

Označíme-li pro pevné (t_0, x_0)

$$x(t) := \varphi(t; t_0, x_0)$$

a

$$u(t) := D_w \varphi(t; t_0, x_0),$$

pak platí

$$u'(t) = [\nabla_x f(t, x(t))] u(t), \quad u(t_0) = w. \tag{V}$$

Říkáme, že u splňuje rovnici ve variacích.

Důkaz. Buď $(t_0, x_0) \in \Omega$. Definujme

$$x(t) := \varphi(t; t_0, x_0)$$

maximální řešení splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$. Vezmeme $w \in \mathbb{R}^n$ a definujme funkce u jako řešení rovnici ve variacích (V). Dokažeme, že

$$u(t) = D_w \varphi(t; t_0, x_0).$$

Vezmeme t pevné a h dost malé. Pak $\varphi(t; t_0, x_0 + hw)$ je definováno (plyne z otevřenosti G). Označme y_h řešení s počáteční podmínkou $y_h(t_0) = x_0 + hw$. Chceme zkoumat výraz

$$\eta_h(t) = \frac{\varphi(t; t_0, x_0 + hw) - \varphi(t; t_0, x_0)}{h} - u(t) = \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t).$$

Chceme dokázat, že $\lim\limits_{h \to 0} \eta_h(t) = 0$. Máme

$$\frac{y_h(t) - x(t)}{h} = w + \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t} \left(f(y_h(s), s) - f(x(s), s) \right) ds = w + \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \nabla_x f\left(x(s) + \theta(y_h(s) - x(s)), s \right) \cdot (y_h(s) - x(s)) d\theta ds$$

a

$$u(t) = w + \int_{t_0}^{t} \nabla_x f(x(s), s) u(s) ds,$$

když odečteme, dostaneme

$$\frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t) = \int_{t_0}^{t} \nabla_x f(x(s), s) \left(\frac{y_h(s) - x(s)}{h} - u(s) \right) ds +$$

$$+ \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t} \int_{0}^{1} \left[\nabla_x f(x(s) + \theta(y_h(s) - x(s)), s) - \nabla_x f(x(s), s) \right] (y_h(s) - x(s)) d\theta ds.$$

Pro $y_h(s) - x(s)$ použijeme důsledek z Věty 4.1,

$$|y_h(s) - x(s)| \leq |hw| e^{L|s-t_0|}.$$

Označme $\eta_h(t) := \frac{y_h(t)-x(t)}{h} - u(t)$. Pak platí odhad

$$|\eta_h(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|\nabla_x f(x(s),s)|}_{\leq C} \cdot |\eta_h(s)| ds + \underbrace{\max_{|x-y|\leq |h|e^{L|t-t_0|}} |\nabla_x f(x,s) - \nabla_x f(y,s)|}_{\to 0 \text{ pro } h\to 0} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|}$$

5 Lineární rovnice.

Definice. Lineární rovnicí rozumíme

$$x' = A(t)x + g(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.2}$$

kde $A(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

Věta 5.1. *Nechť $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (5.2), definované na celém (a,b).*

Poznámka. Podstatný rys lineárních rovnic: globální existence řešení, tj. na oboru spojitosti $A(t)$, $g(t)$. Ve skutečnosti platí i pro nelineární rovnice $x' = f(t,x)$ se sublineární pravou stranou, tj. pokud $|f(t,x)| \leq a(t)|x| + g(t)$, kde $a(\cdot)$, $g(\cdot)$ jsou spojité.

Definice. Homogenní rovnicí rozumíme (5.2) pro $g(t) \equiv 0$, tj.

$$x' = A(t)x, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.3}$$

Věta 5.2. *Množina $\mathcal{R}_H$ řešení homogenní rovnice (5.3) tvoří n-dimenzionální podprostor v $C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$.*

Definice. Fundamentálním systémem (f.s.) pro (5.3) rozumíme libovolnou bázi $\mathcal{R}_H$. Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentální systému, nazýváme fundamentální maticí (f.m.) pro (5.3).

Poznámka. Je-li $\Phi(t)$ nějaká f.m. pak:

- $\Phi(t)$ splňuje „maticový tvar (5.3)“, tj. $\Phi' = A(t)\Phi$
- $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (a,b)$
- obecné řešení (5.3) má tvar $\Phi(t)c$, kde $c \in \mathbb{R}^n$ (sloupcový vektor)
- $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ je také f.m., navíc splňující $\tilde{\Phi}(t_0) = I$.

Věta 5.3 (Variace konstant.)**.** *Nechť $\Phi(t)$ je libovolná f.m. pro (5.3). Potom řešení rovnice (5.2) lze napsat ve tvaru*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(s)ds, \qquad t \in (a,b).$$

Věta 5.4 (Liouvilleova formule.)**.** *Nechť $\Phi(t)$ je maticové řešení (5.3), nechť $w(t) = \det \Phi(t)$. Potom*

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds\right)$$

kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice A.

Poznámka. Nechť $\varphi(t,x_0)$ je řešicí funkce autonomní rovnice $x = f(x)$, $x(0) = x_0$. Je-li $f \in C^1$, je $\varphi(t,\cdot)$ (lokálně) difeomorfismus ($\varphi_{-1}(t,\cdot) = \varphi(-t,\cdot)$). Z věty o substituci a předchozí věty vyplývá

$$\lambda_n(\varphi(t,A)) = \int_A \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}_x f(\varphi(u,s))ds\right) du$$

kde $\operatorname{div} f = \operatorname{tr}\nabla f$. Speciálně : je-li $\operatorname{div} f = 0$, pak $\varphi(t,\cdot)$ zachovává objem množin.

6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty.

Definice. Normu matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme

$$\|A\| = \sup\big\{|Ax|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \le 1\big\}.$$

Připomeňme, že $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ je absolutní hodnota („norma“) vektoru $x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 6.1. *[Vlastnosti normy matice.] Nechť A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom :*

(i) $\|A\| \ge 0$, *a* $\|A\| = 0$ *právě když* $A = 0$;

(ii) $\|aA\| = |a|\|A\|$ *pro* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$;

(iv) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$;

(v) $|Ax| \le \|A\||x|$ *pro* $\forall x \in \mathbb{R}^n$;

(vi) je-li A regulární, pak $|Ay| \ge |y|/\|A^{-1}\|$ *pro* $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky. Lze zavést jiné (nutně ekvivalentní) normy matice, např.

$$\|A\|_\infty = \max\{[A]_{ij};\ 1 \le i, j \le n\}$$

kde $[A]_{ij}$ značí prvek ij matice A. Výhoda výše uvedené normy je ve vlastnostech (iv-vi) Věty 6.1, které např. pro normu $\|A\|_\infty$ neplatí (resp. platí až na vhodnou konstantu).

Často (a mlčky) užívaná úvaha : $A_n \to A$ v normě, právě když $[A_n]_{ij} \to [A]_{ij}$ pro každé ij. Podobně (tj. po složkách) lze ekvivalentně nahlížet na další „limitní“ operace maticových funkcí (derivace, integrál, součet řady).

Definice. Maticovou exponenciálu definujeme předpisem $e^A = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}A^k$ (s konvencí $A^0 = I$).

Poznámka. Řada konverguje absolutně a platí $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$.

Věta 6.2. *Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice*

$$x' = Ax, \tag{6.4}$$

a platí $U(0) = I$.

Věta 6.3. *[Vlastnosti maticové exponenciály.]*

(i) $e^{aI} = e^a I$ *pro* $\forall a \in \mathbb{R}$

(ii) pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A e^B$

(iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$

(iv) $e^{-A} = \big(e^A\big)^{-1}$; *speciálně e^A je vždy regulární*

Poznámka. [Výpočet e^{tA} v praxi.] Pro nilpotentní A (tj. $A^m = 0$ pro nějaké $m \ge 1$) snadno z definice. O obecném případě (vzhledem k bodu (iii) Věty 6.3.) stačí uvažovat Jordanovu buňku $J = aI + L$, kde L (nulová až na 1 nad diagonálou) je zjevně nilpotentní. Tedy (body (i-ii) Věty 6.3.) $\exp tJ = e^{at}P(t)$, kde $P(t)$ je tvořena polynomy stupně $< n$ nad jednotkovou diagonálou. Platí $P^{-1}(t) = P(-t)$ a $\|P(t)\| \sim (1 + |t|^m)$.

Věta 6.4. *[Variace konstant pro (6.5).] Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $t_0 \in (a, b)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jsou dána. Potom řešení rovnice*

$$x' = Ax + g(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{6.5}$$

má tvar

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s)ds, \qquad t \in (a, b).$$

Definice. Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ značí $\sigma(A)$ spektrum matice a definujeme $\sigma_-(A) = \sigma(A)\cap\{\mathrm{Re} < 0\}$, $\sigma_0(A) = \sigma(A)\cap\{\mathrm{Re} = 0\}$, $\sigma_+(A) = \sigma(A)\cap\{\mathrm{Re} > 0\}$. Prostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme $X_-(A)$, $X_+(A)$, $X_0(A)$ (nazýváme je stabilní, nestabilní a centrální podprostor). Zřejmě $\mathbb{R}^n = X_+(A) \oplus X_+(A) \oplus X_0(A)$. Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k A a též vzhledem k e^{tA}.

Věta 6.5. *[Asymptotické chování řešení (6.4).] Nechť A je daná matice. Potom existují α, β, M a $c > 0$ takové, že pro každé $t \geq 0$ platí:*

1. *(stabilní podprostor)* $x_0 \in X_-(A) \implies |e^{tA}x_0| \leq ce^{-\alpha t}|x_0|$
2. *(nestabilní podprostor)* $x_0 \in X_+(A) \implies |e^{tA}x_0| \geq c^{-1}e^{\beta t}|x_0|$
3. *(centrální podprostor)* $x_0 \in X_0(A) \implies c^{-1}(1+t)^{-M}|x_0| \leq |e^{tA}x_0| \leq c(1+t)^M|x_0|$

Poznámka. Uvedené vlastnosti prostory $X_-(A)$, $X_+(A)$ a $X_0(A)$ <u>charakterizují</u>. Pro $t \leq 0$ platí zrcadlové odhady: exponenciální růst na $X_-(A)$, exponenciální pokles na $X_+(A)$, polynomiální chování na $X_0(A)$.

7 Stabilita řešení

$$x' = f(t,x) \qquad (DR).$$

Motivace. V kapitole 4 jsme odvodili spojitou závislost na počáteční podmínce

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|},$$

kde $x_0 - y_0 = x(t_0) - y(t_0)$, a L je lipšitzovská konstanta funkce f. Odsud vidíme, že pokud $x(t_0) - y(t_0)$ je malé, pak $x(t) - y(t)$ je malé na každém omezeném intervalu $[t_0, t_0 + T]$.

Pro $T \to +\infty$ odhad se kazí.

Otázka: Zůstanou řešení x a y blízko i pro $t \to +\infty$?

Definice. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\tau \in \mathbb{R}$ a $\{0\} \times [\tau, +\infty) \subset \Omega$. Buď $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a lokálně lipšitzovská vzhledem k x a platí

$$f(0,t) = 0 \qquad \forall t \geq \tau.$$

Označme

$$I = [\tau, +\infty).$$

Pak nulové řešení rovnice (DR) se nazývá

I. <u>stabilní</u>, je-li $\forall t_0 \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0\ \forall t \geq t_0 : \quad |x_0| < \delta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$

II. <u>nestabilní</u>, je-li není stabilní.

III. <u>lokální atraktor</u>, je-li $\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ \forall x_0 : \quad |x_0| < \eta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$

IV. <u>asymptoticky stabilní</u>, je-li je stabilní a je lokální atraktor.

V. <u>uniformně stabilní</u>, je-li $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t_0 \in I\ \forall t \geq t_0\ \forall x_0 : \quad |x_0| < \delta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$

VI. <u>uniformně asymptoticky stabilní</u>, je-li je uniformně stabilní a zároveň

$$\exists \eta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists T > 0\ \forall t_0 \in I\ \forall t \geq t_0 + T\ \forall x_0 : \quad |x_0| < \eta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Pro autonomní rovnice $x' = f(x)$ stabilita je ekvivalentní uniformní stabilitě, a asymptotická stabilita je ekvivalentní uniformní asymptotické stabilitě.

Příklad. Míč na kopci (nestabilní), míč na rovině (stabilní ale není asymptoticky stabilní), míč na dně (asymptoticky stabilní).

Poznámka. Definujme pojmy pro obecné řešení $x_0(t), t \in I$. Označme $y(t) = x(t) - x_0(t)$, pak

$$y'(t) = f(t, x(t))) - f(t, x_0(t)) = \underbrace{f(t, y(t) + x_0(t)) - f(t, x_0(t))}_{:= g(t, y(t))}.$$

x_0 je stbilní řešení (DR) pravě tehdy, kdy y je stabilní řešení rovnice $y' = g(t,y)$.

Věta 7.1. *Nulové řešení rovnice $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je*

I. *asymptoticky stabilní* $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0\ \forall \lambda \in \sigma(A)$.

II. *stabilní* $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda \leq 0\ \forall \lambda \in \sigma(A)$ *a Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům s* $\operatorname{Re} \lambda = 0$ *mají velikost 1.*

Důkaz: ihned z Věty 6.5.

Poznámka. Pro (HRK) $x' = Ax$ mají všechna řešení stejný typ stability.

Poznámka. Je-li A závislá na čase, pak žádná taková spektrální podmínka nefunguje.

Věta 7.2. *Buď $A : I = [\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ spojitá, Φ libovolná fundamentální matice úlohy (LR) $\quad x' = A(t)x$. Potom nulové řešení je*

I. *stabilní* $\Leftrightarrow \quad \|\Phi(t)\|$ *je omezená na I.*

II. *uniformně stabilní* $\Leftrightarrow \quad \exists C > 0\ \forall s \leq t \in I : \quad \|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq C.$

III. *asymptoticky stabilní* $\Leftrightarrow \quad \|\Phi(t)\| \to 0$ *pro* $t \to +\infty$.

IV. *uniformně asymptoticky stabilní* $\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, C > 0\ \forall s \leq t \in I : \quad \|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq Ce^{-\alpha(t-s)}.$

Lemma 7.1. *Dána rovnice $x' = Ax + g(t,x)$. Nechť $\|e^{tA}\| \le Ke^{-\alpha t} \quad \forall t \ge 0$, g spojitá v $\mathbb{R}^{n+1}$ a $|g(t,x)| \le \gamma \cdot |x|$, kde $\gamma < \frac{\alpha}{K}$. Pak nulové řešení je uniformně asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Buď x řešení. Označme $b(t) := g(t, x(t))$, pak původní nelineární rovnici zapíšeme jako lineární rovnici s neznámou pravou části,

$$x' = Ax + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Z věty o variaci konstant najdeme

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \underbrace{b(s)}_{g(t,x(t))} ds$$

a odhadneme

$$|x(t)| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0| + \int_{t_0}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)} \cdot \gamma \cdot |x(s)| ds.$$

Vynásobíme obě strany $e^{\alpha t}$ a použijeme Gronwallovo lemma.

$$|e^{\alpha t}x(t)| \le Ke^{\alpha t_0}|x_0| + \int_{t_0}^{t} K\gamma \cdot e^{\alpha s} \cdot |x(s)| ds,$$

$$(GL) \Rightarrow |e^{\alpha t}x(t)| \le Ke^{\alpha t_0}|x_0| \cdot e^{K\gamma(t-t_0)}, \quad t > t_0,$$

pak

$$|x(t)| \le K|x_0| \cdot e^{(K\gamma-\alpha)(t-t_0)}, \quad t > t_0,$$

a máme hotovo protože $K\gamma - \alpha < 0$.

□

Každou lineární rovnici můžeme zapsat jako

$$(AR) \quad x' = f(t,x), \qquad x' = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{zbytek}_{o(x-x_0)},$$

Věta 7.3 (o linearizované stabilitě)**.** *Dána rovnice $(AR) \quad x' = f(x)$, kde f je třídy C^1 na okolí x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a matice $A = \nabla f(x_0)$ splňuje $\operatorname{Re}\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$. Pak $x(t) \equiv x_0$ je uniformně asymptoticky stabilní.*

Věta 7.4 (o linearizované nestabilitě)**.** *Dána rovnice $(AR) \quad x' = f(x)$, kde f je třídy C^1 na okolí x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a matice $A = \nabla f(x_0)$ splňuje $\exists \lambda \in \sigma(A) \quad \operatorname{Re}\lambda > 0$. Pak $x(t) \equiv x_0$ je nestabilní.*

Poznámka 1. Nedokážeme rozhodnout případ $\max \operatorname{Re}\lambda = 0$.

Poznámka 2. Dává jen lokální výsledky.

Poznámka 2. Platí pouze pro autonomní rovnice.

Důkaz věty 7.3: Definujme $g(x) = f(x) - \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=:A} \cdot x$. Máme

$$(AR) \quad \Leftrightarrow \quad x' = Ax + g(x).$$

Označme $\lambda_0 := \max\{\operatorname{Re}\lambda : \ \lambda \in \sigma(A)\} < 0$ a buď $\alpha \in (\lambda_0, 0)$. Pak $\exists K > 0 : \quad \|e^{tA}\| \le Ke^{-\alpha t}$ (Důsledek 6.6).

Plati $\frac{g(x)}{|x|} \to 0$ pro $x \to x_0$ (zbytek Taylorova polynomu $g(x) = o(x)$ pro $x \to x_0$). Volime $\gamma > 0, \gamma < \frac{\alpha}{K}$ a najdeme $\Delta > 0$ aby

$$\frac{|g(x)|}{|x|} < \gamma \quad \forall x : \ |x - x_0| < \Delta, \qquad \text{takže } |g(x)| < \gamma|x|. \qquad (*)$$

Aplikujeme seřezávací funkci, aby nerovnost $(*)$ platila na celém $\mathbb{R}^n$,

$$h(x) := \eta(|x - x_0|) \cdot g(x), \quad \text{kde} \quad \eta(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \frac{\Delta}{2}], \\ \text{spojitá a je v intervalu } (0,1) \text{ pro } s \in (\frac{\Delta}{2}, \Delta), \\ 0, & s \ge \Delta. \end{cases}$$

Podivejme se na rovnici $x' = Ax + h(x)$. Ona splňuje předpoklady Lemmatu 7.1: pro $|x - x_0| \leq \frac{\Delta}{2}$, $|h(x)| = |g(x)| < \gamma|x|$. Pro $|x - x_0| \leq \Delta$, $|h(x)| \leq |g(x)| < \gamma|x|$. Pro $|x - x_0| > \Delta$, $0 = |h(x)| < \gamma|x|$.

Pak stacionární řešení $x = x_0$ je uniformně asymptoticky stabilní, tedy je i stabilní. Pak $\exists \delta > 0$ že $|x(t_0) < \delta| \;\Rightarrow\; |x(t)| < \frac{\Delta}{2}\ \forall t > t_0$.

Takže pokud $|x(t_0) - x_0| < \delta$, pak $x' = Ax + h(x) = Ax + g(x) = f(x)$.

Takže x je řešení (AR) a $x(t) \to x_0$, odkud plyne, že $x = x_0$ je také uniformně asymptoticky stabilní řešení (AR).

□

Důkaz Věty 7.4. Myšlenka důkazu: chceme pro nelinární rovnici ukázat, že řešení se drží nestabilních směrů.

Krok 1. přejdeme do Jordanova kanonického tvaru.

Krok 2. pokud p.p. je v nějakém kuželu nestabilního směru, pak řešení půjde nestabilním směrem a opustí okolí bodu 0.

8 První integrál.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Funkce $U : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazve první integrál rovnice

$$x' = f(x) \tag{8.6}$$

v Ω, jestliže :

1. U je třídy C^1 a nekonstantní v Ω
2. $t \mapsto U(x(t))$ je konstantní, pokud $x(t)$ je libovolné řešení (8.6) v Ω

Poznámka. Fyzikální význam: zachovávající se veličina (energie). Geometrický význam: řešení (8.6) tvoří „vrstevnice“ grafu U.

Věta 8.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ je C^1. Potom je ekvivalentní:*
(i) pro každé $x(t)$ řešení rovnice (1.1) $x' = f(t, x)$ v Ω je $t \mapsto V(x(t), t)$ konstantní
(ii) $\partial_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x) = 0$ pro každý bod $(t, x) \in \Omega$.

Definice. Výraz $\partial_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x) \cdot f(t, x)$ podrobně zapsáno

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(t, x) f_j(t, x)$$

nazýváme orbitální derivací funkce V vzhledem k rovnici (1.1). Značíme $\dot{V}_f$. Je-li $x(t)$ libovolné řešení (1.1), pak $\frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \dot{V}_f(t, x(t))$.

Definice. Funkce $U_j(x)$ třídy C^1 nazveme nezávislé v bodě x_0, jestliže matice $\{\frac{\partial U_j}{\partial x_j}(x_0)\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$ má hodnost k.
Ekvivalentně: vektory $\nabla U_j(x_0) \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Zřejmě existuje nejvýše n funkcí, jež jsou nezávislé v daném bodě. Pokud tyto funkce jsou zároveň první integrály rovnice (8.6), přičemž x_0 není stacionární bod, pak existuje nejvýše $n-1$ takových funkcí.

Věta 8.2. *Nechť jsou dány první integrály $U_1, \ldots, U_k$ rovnice (8.6), které jsou nezávislé v bodě x_0. Potom (8.6) lze v jistém okolí x_0 redukovat na soustavu $n - k$ (diferenciálních) rovnic.*

Věta 8.3. *Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0, a nechť $f(x_0) \neq 0$. Potom rovnice (8.6) má $n - 1$ prvních integrálů, které jsou nezávislé v bodě x_0.*

Poznámka. Kombinace Vět 8.1 a 8.3 zaručuje (lokální) existenci řešení PDR 1. řádu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(x) = 0$$

pro neznámou funkci $U = U(x)$. Mírnou adaptací důkazu lze získat (na jistém okolí $x_0 \in \Omega$) řešení obecnější rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} f_j(x, U) + g(x, U) = 0$$

s předepsanou hodnotou na libovolné C^1 nadploše Γ za předpokladu, že $f(x_0)$ není tečný směr ke Γ v bodě x_0. Tento postup se nazývá metoda charakteristik.

9 Stabilita podruhé.

V této kapitole studujeme opět obecnou rovnici (1.1), tj.

$$x' = f(t, x)$$

za trvalých předpokladů: $f(t, x) : \mathcal{O} \times I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina obsahující 0 a $I = (\tau, \infty)$. Předpokládáme $f(0, t) = 0$ pro $\forall t \in I$, tj. $x(t) = 0$ je řešení v I, o jehož stabilitu půjde.

Definice. Funkce $\omega(x) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ se nazve pozitivně definitní, jestliže je spojitá, $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) > 0$ pro $\forall x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$.

Definice. Funkce $V(t, x) : \mathcal{O} \times I \to \mathbb{R}$ se nazve Ljapunovská funkce rovnice (1.1) pro bod 0, jestliže:

(I) $V(t,x)$ je spojitá, nezáporná a $V(0,t)=0$ pro $\forall t \in I$,

(II) funkce $t \mapsto V(x(t),t)$ je nerostoucí pro každé $x(t)$ řešení (1.1) v $\mathcal{O} \times I$,

(III) existuje pozitivně definitní funkce $\omega(x)$ v $\mathcal{O}$ taková, že $V(t,x) \geq \omega(x)$ pro každý bod $(t,x) \in \mathcal{O} \times I$.

Poznámka. Je-li $V(t,x)$ třídy C^1, je podmínka (ii) výše ekvivalentní nekladnosti orbitální derivace, tj.

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \nabla_x V(t,x) \cdot f(t,x) \leq 0 \qquad \forall\ (t,x) \in \mathcal{O} \times I$$

Důkaz je analogický Větě 8.1. Podobně podmínka (v) ve Větě 10.2 níže je ekvivalentní

$$\dot{V}_f(t,x) \leq -\eta(x)\,,$$

pro všechny body $(t,x) \in \mathcal{O} \times I$.

Věta 9.1. *Nechť rovnice (1.1) má Ljapunovskou funkci pro bod 0. Potom nulové řešení je stabilní v I.*

Lemma 9.1. *Nechť $\omega(x)$ je pozitivně definitní v $\mathcal{O}$, nechť $x_n \in \overline{U(0,\varepsilon)} \subset \mathcal{O}$, nechť $\omega(x_n) \to 0$. Potom $x_n \to 0$.*

Věta 9.2. *Nechť rovnice (1.1) má Ljapunovskou funkci $V(t,x)$ v $\mathcal{O} \times I$. Nechť navíc existují funkce $\lambda(x)$ a $\eta(x)$ pozitivně definitní v $\mathcal{O}$ takové, že:*

(IV) $V(t,x) \leq \lambda(x)$ pro každý bod $\forall (t,x) \in \mathcal{O} \times I$,

(V) $\frac{d}{dt}V(x(t),t) \leq -\eta(x(t))$ každé $x(t)$ řešení (1.1) v $\mathcal{O} \times I$.

Potom 0 je asymptoticky stabilní v I.

Věta 9.3. *Je dána rovnice $x' = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *0 je asymptoticky stabilní v $[0,\infty)$;*
2. *$\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$ (neboli A je Hurwitzovská);*
3. *existují α, $c > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$ pro $\forall t \geq 0$;*
4. *existuje symetrická, pozitivně definitní $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že*

$$A^T B + BA = -I.$$

Poznámka. Poslední rovnost se nazývá Ljapunovova rovnice. Z bodu (4) plyne, že $V(x) = x \cdot Bx$ je Ljapunovskou funkcí rovnice $x' = Ax$. Pomocí této Ljapunovské funkce lze také dokázat Větu 7.3 (o linearizované stabilitě).

10 Šturmova srovnávací věta.

V této kapitole se budeme zabývat lineární homogenní rovnicí 2. řádu

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{10.7}$$

kde $a_j(t)$ jsou spojité, navíc $a_0(t) \neq 0$ v intervalu $I = (\alpha,\beta)$. Podle Věty 9.3 je řešení jednoznačně určeno hodnotami $x(t_0)$ a $x'(t_0)$ v předepsaném t_0 a je třídy $C^2(I)$.

Budeme se zabývat problémem rozložení nulových bodů (netriviálních) řešení této rovnice.

Lemma 10.1. *Nechť $x(t)$ je netriviální řešení rovnice (10.7), $t_0 \in I$.*

(i) je-li $x(t_0) = 0$, je $x'(t_0) \neq 0$

(ii) je-li $x(t_0) = 0$ a $y(t)$ je jiné řešení, též splňující $y(t_0) = 0$, pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $y(t) = \lambda x(t)$ pro $\forall t \in I$

(iii) množina $N(x) = \{t \in I;\ x(t) = 0\}$ nulových bodů nemá v I hromadný bod

Důsledky. Každý kompaktní interval $[a,b] \subset I$ obsahuje nejvýše konečně prvků $N(x)$. Má tedy smysl hovořit o nejbližším větším/menším („sousedním“) nulovém bodě. ($N(x)$ může být nekonečná s hromadnými body α či β.)

Lemma 10.2. *(a) Rovnice (10.7) je vzájemně převoditelná na tvar*

$$\big(p(t)x'\big)' + q(t)x = 0 \tag{10.8}$$

kde $p(t)$, $p'(t)$ a $q(t)$ jsou spojité v I, navíc $p(t) \neq 0$. Příslušná substituce navíc zachovává nulové body řešení.

(b) pokud navíc funkce $\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}$ je diferencovátelná v I, potom rovnice (10.7) je převoditelná na tvar

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0,$$

kde $q(t)$ je spojitá v I.

Věta 10.1 (Šturmova srovnávací věta.)**.** *Nechť $p(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ jsou spojité v I, navíc $p(t) > 0$. Nechť $x(t)$ je <u>netriviální</u> řešení rovnice*

$$\big(p(t)x'\big)' + q_1(t)x = 0 \tag{10.9}$$

Nechť $y(t)$ je (libovolné) řešení rovnice

$$\big(p(t)y'\big)' + q_2(t)y = 0 \tag{10.10}$$

Nechť $t_1 < t_2$ jsou sousední body $N(x)$ a nechť (klíčový předpoklad) $q_2(t) \geq q_1(t)$ v $[t_1, t_2]$. Potom buď

(I) $y(t)$ má v (t_1, t_2) nulový bod, nebo

(II) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $y(t) = \lambda x(t)$ a $q_1(t) = q_2(t)$ pro $\forall t \in [t_1, t_2]$. Speciálně, $y(t)$ má nulový bod v $[t_1, t_2]$.

Poznámka. Jde o rovnice tvaru $x'' = -q(t)x$, tj. $q(t)$ má význam zpětné vazby (např. tuhost pružiny). Smysl věty je: silnější zpětná vazba $\implies$ více nulových bodů.

Věta 10.2 (Šturmova oddělovací věta)**.** *Nechť $p(t)$, $p'(t)$ a $q(t)$ jsou spojité v I, navíc $p(t) \neq 0$. Nechť $\{u(t), v(t)\}$ je libovolný fundamentální systém rovnice (10.8). Nechť $N(u)$, $N(v)$ jsou nulové body $u(t)$, $v(t)$. Potom $N(u)$, $N(v)$ jsou disjunktní a mezi dvěma sousedními body $N(u)$ leží právě jeden bod $N(v)$.*

11 Floquetova teorie.

V této kapitole budeme studovat lineární rovnici

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{11.11}$$

kde $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$ jsou spojité a T-periodické v $\mathbb{R}$. Budeme se zabývat otázkou existence periodických řešení a otázkou stability řešení pro (11.11).

Poznámky. Pro danou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ podle Věty 5.1 existuje právě jedno řešení v $\mathbb{R}$. Je-li $x(t)$ řešení, je také $y(t) := x(t+T)$ řešení. Řešení $x(t)$ je T-periodické, právě když $x(T) = x(0)$.

Lemma 11.1. *Nechť A je regulární matice. Pak existuje matice B (obecně komplexní a ne jednoznačně určená) taková, že $e^B = A$.*

Věta 11.1. *[Floquetova.] Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice úlohy (11.11), nechť navíc $\Phi(0) = I$. Potom existuje regulární a vzhledem k času spojitá, T-periodická matice $Q(t)$ a dále (konstantní) matice B takové, že $\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$.*

Poznámka. Tzv. Floquetova transformace $x = Q(t)y$ převádí rovnici

$$x' = A(t)x \tag{11.12}$$

na rovnici s konstantními koeficienty $y' = By$. Matice $C = \Phi(T) = e^{TB}$ se nazývá <u>matice monodromie</u>. Tato matice reprezentuje řešicí operátor v čase periody a lze z ní vyčíst mnohé podstatné informace (existence periodických řešení, stabilita, ...).

Věta 11.2. *Nechť matice $A(t)$ je spojitá, T-periodická. Potom je ekvivalentní:*

1. *rovnice (11.11) má pro dané T-periodické $b(t)$ právě jedno T-periodické řešení;*
2. *rovnice (11.12) má pouze triviální T-periodické řešení;*
3. *$1 \notin \sigma(C)$, kde C je matice monodromie.*

Věta 11.3. *Uvažujme homogenní rovnici $x' = A(t)x$. Nechť C je matice monodromie. Potom nulové řešení je:*

(i) stabilní, právě když: $|\lambda| \leq 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$ a pokud $|\lambda| = 1$, jde o vlastní číslo s přislušnou Jordanovou buňkou velikosti 1;

(ii) asymptoticky stabilní, právě když $|\lambda| < 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$.

Klíčové pojmy:

1. řešení soustavy ODR 1. řádu (Kapitola 1)
2. vlastnosti lokální a globální jednoznačnosti (Kapitola 2)
3. prodloužení řešení, maximální řešení (Kapitola 3)
4. řešicí funkce pro ODR tvaru $x' = f(t, x)$ (Kapitola 4)
5. (homogenní) lineární ODR (Kapitola 5)
6. fundamentální matice (Kapitola 5)
7. maticová exponenciála (Kapitola 6)
8. stabilita, asymptotická stabilita (Kapitola 7)
9. první integrál (Kapitola 8)
10. ljapunovská funkce rovnice (Kapitola 9)
11. matice monodromie pro lineární systém s periodickými koeficienty (Kapitola 11)

Lehké věty:

1. lemma o integrální formulaci ODR (Lemma 1.1)
2. vztah lokální a globální jednoznačnosti (Věta 2.1)
3. lipšitzovská podmínka lokální jednoznačnosti (Věta 2.2)
4. C^1 vůčí x a lokální lipšitzovskost (Lemma 2.1)
5. existence maximálního prodloužení (Věta 3.1)
6. charakterizace prodloužitelných řešení (Lemma 3.1)
7. o opuštění kompaktu (Věta 3.2)
8. Gronwallovo lemma (Věta 4.1)
9. lipschitzova závislost na počáteční podmínce (Lemma 4.1)
10. existence a jednoznačnost pro lineární rovnici (Věta 5.1)
11. množina řešení lineární rovnice s konstantnimí koeficienty (Věta 5.2)
12. variace konstant (Věta 5.3)
13. Liouvilleova formule (Věta 5.4)
14. vlastnosti normy matice (Věta 6.1)
15. fundamentální matice lineární rovnice s konstantními koeficienty (Věta 6.2)
16. vlastnosti maticové exponenciály (Věta 6.3)
17. stabilita lineární rovnice s konstantními koeficienty (Věta 7.1)
18. stabilita perturbované lineární rovnice (Lemma 7.1)
19. konstantnost funkce podél řešení (Věta 8.1)
20. redukce řádu rovnice pomocí 1. integrálů (Věta 8.2)
21. ljapunovská funkce a stabilita (Věta 9.1)
22. stabilita lineární rovnice s konstantnimí koeficienty podruhé (Věta 9.3)
23. vlastnosti nulových bodů lineární rovnice druhého řádu (Lemma 10.1)
24. Šturmova oddělovací věta (Věta 10.2)
25. existence logarithmu od matice (Lemma 11.1)
26. Floquetova věta (Věta 11.1)
27. existence periodických řešení pro soustavu s periodickými koeficienty (Věta 11.2)
28. stabilita nulového řešení pro homogenní lineární soustavu s periodickými koeficienty (Věta 11.3)

Těžké věty:

1. Peanova věta (Věta 1.1)
2. spojitost řešicí funkce (Věta 4.2)
3. diferencovatelnost řešicí funkce (Věta 4.3)
4. asymptotické chování lineární rovnice s konstantními koeficienty (Věta 6.5)
5. stabilita a fundamentální matice (Věta 7.2)
6. o linearizované stabilitě (Věta 7.3)
7. o linearizované nestabilitě (Věta 7.4)
8. existence prvníh integrálů (Věta 8.1)
9. ljapunovská funkce a asymptotická stabilita (Věta 9.2)
10. Šturmova srovnávací věta (Věta 10.1)