Obyčejné diferenciální rovnice, letní semestr 2023-2024

1 1. přednáška

MOTIVACE:

1. FYZIKA, kmitání pružiny
$$m \cdot x'' = -kx,$$
kde $m > 0$ hmotnost, $k > 0$ tuhost pružiny, x výchylka, x'' zrychlení.

2. BIOLOGIE, model dravec - kořist, který popisuje vyvoj populaci.
$$\begin{cases} d' = \alpha dk - \beta d, \\ k' = \gamma k - \delta dk, \end{cases}$$
kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou nějaké kladné konstanty, d a k jsou dravec a kořist, (buď počet kusů, nebo celková hmotnost dravců a kořisti).

3. EKONOMIE
$$k' = \alpha k - c(t),$$
kde k je kapital, $\alpha > 0$ nějaká konstanta, $c(t) > 0$ funkce spotřeby.

Co nás zajímá na diferenciálních rovnicích?

1. Přesné řešení (často neumíme spočítat).
2. Existence a jednoznačnost řešení.
3. Jaké vlastnosti má řešení?

PŘEDPOKLADY:
$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $I \subset \mathbb{R}$ interval, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá.

$$x' = f(x,t) \tag{DR}$$

Příklady.

1. $\begin{cases} x' = 2xyt, \\ y' = 3x - y + t^2. \end{cases}$
2. $x'' + 3x'^2 x - 2\cos x = 0.$

DEFINICE. Funkce $x : I \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ je řešení (DR), jestliže

I. $\forall t \in I \quad (x(t), t) \in \Omega,$

II. $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$,

III. $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t), t)$.

KOMENTÁŘ: stačí jen třetí vlastnost, obsahuje v sobě implicitně první dvě.

POZNAMKA: Typicky (DR) má nekonečně mnoha řešení. Když přídáme počáteční podmínku, to dostaneme jediné řešení.

Lemma 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $(x_0, t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$ a $x : I \to \mathbb{R}^n$ spojitá a taková, že graf x leží v Ω. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

I. (x, I) je řešení (DR) splňující počáteční podminku $x(t_0) = x_0$.

II. $\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds.$

Proof. Důkaz jednoduchý. □

Věta 1 (Peanova, o lokální existenci, 1890). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$, která je řešením (DR) a splňuje počáteční podminku $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz je založený na ARZELA-ASCOLÍHO VĚTĚ,

Věta 2 (**ARZELA-ASCOLI**). *Nechť $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ (K je kompakt) je množina stejně omezených a stejně spojitých funkcí. Pak M je relativně kompaktní v $C(K, \mathbb{R}^n)$ (se suprémovou normou).*

Připomínky.

- relativně kompaktní: uzávěr je kompaktní (z káždé posloupnosti dokážeme vybrat konvergentní podposloupnost).
- stejně spojitých: $\forall t \in K\ \forall \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall f \in M : \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$
- stejně omezených: $\exists D > 0\ \forall f \in M\ \forall t \in K : \quad |f(t)| \leq D \quad (\text{nebo}\|f\|_\infty \leq D).$

* stejnoměrná spojitost: $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x, y : \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

* funkce spojitá na kompaktu je stejnoměrně spojitá.

* posloupnost spojitých funkcí, stejnoměrně konvergujících k nějaké funkce, konverguje ke spojité funkce.

Důkaz Peanovy věty.
1. KROK. Dokážeme pomocné tvrzení,

"Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f omezená na Ω, pak $\forall T > 0$ existuje řešení (DR) $x : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n$ *spňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$."*

Krok 1.a) Řešme pomocnou úlohu

$$x_\lambda(t) = x_0 \text{ na } [t_0 - \lambda, 0]; \qquad x_\lambda(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_\lambda(s - \lambda), s) ds. \tag{P_λ}$$

Krok 1.b) Uvažujme množinu $M = \left\{ x_{1/n}|_{[t_0,T]} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Chceme dokázat, že tahle posloupnost se k něčemu blíží, a že to něco k čemu se blíží splňuje integrální rovnici. Odhadneme

$$|x_\lambda(t)| \leq |x_0| + \|f\|_\infty |T - t_0| \qquad \text{(stejnoměrná spojitost)},$$

$$|x_\lambda(t) - x_\lambda(s)| = \left| \int_s^t f(x_\lambda(r - \lambda), r) dr \right| \leq \|f\|_\infty |t - s| \quad \text{(Lipšitzovskost, pak stejnoměrná spojitost)}.$$

Podle Arzela-Ascolího věty, můžeme výbrat konvergentní podposloupnost $x_{n_k} \rightrightarrows x$.

Krok 1.c) Ukažeme, že funkce x řeší integrální rovnici. Víme, že (označme si $\lambda_k = \frac{1}{n_k}$)

$$\underbrace{x_{\lambda_k}(t)}_{\to x(t)} = \underbrace{x_0}_{\to x_0} + \underbrace{\int_{t_0}^t f(x_{\lambda_k}(s - \lambda_k), s) ds}_{???\to \int_{t_0}^t f(x(s),s)}.$$

Uvažujme rozdíl mezí integrály a odhadneme

$$\left| \int_{t_0}^t f(x_{\lambda_k}(s - \lambda_k), s) - f(x(s), s) ds \right| \leq$$

$$\int_{t_0}^t |f(x_{\lambda_k}(s - \lambda_k), s) - f(x_{\lambda_k}(s), s)|\, ds + \int_{t_0}^t |f(x_{\lambda_k}(s), s) - f(x(s), s)|\, ds.$$

1. f je stejnoměrně spojitá: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x, s) - f(y, s)| < \varepsilon.$
2. stejná stejnoměrná spojitost: $\forall \delta > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ \forall l\ \forall s : \quad |x_l(s - \lambda_k) - x_l(s)| < \delta.$

   My to chceme s $l = \lambda_k$, takže máme $|x_l(s - \lambda_k) - x_l(s)| < \delta.$
3. stejnoměrná konvergence $x_{\lambda_k} \rightrightarrows x$: $\forall \delta > 0\ \exists k_1\ \forall k > k_1\ \forall s : \quad |x_{\lambda_k}(s) - x(s)| < \delta.$

Z 1) a 2) plyne odhad pro první integrál, z 1) a 3) plyne odhad pro druhý integrál.
Pak jsme ukazali, že x je řešení integrální rovnici a tím pádem i diferenciální rovnici.

Konec první přednášky. Přednáška 2.

Krok 2. Obecné f, Ω.

2 JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ.

DEFINICE Řekneme, že (DR) má vlastnost

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Mame-li 2 řešení (x, I), (y, J) a $t_0 \in I \cap J$ takové, že $x(t_0) = y(t_0)$, potom existuje $\delta > 0$, takové že $x(t) = y(t)$ $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Mame-li 2 řešení (x, I), (y, J) a $t_0 \in I \cap J$ takové, že $x(t_0) = y(t_0)$, potom platí, že $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I \cap J$.

Věta 2.1: lokální jednoznačnost je ekvivalentní globální jednoznačnosti.

DEFINICE Řekneme, že $f = f(x,t)$ je lokálně lipšitzovská (lipschitzovská) v Ω vzhledem k x, jestliže $\forall (x_0, t_0) \in \Omega\ \exists \delta > 0\ \exists L > 0 : \quad \forall t \in \mathcal{U}(t_0, \delta)\ \forall x, y \in \mathcal{U}(x_0, \delta) : \quad |f(x,t) - f(y,t)| \le L|x - y|$.

Věta 2.2 Buď f lok8ln2 lipšitzovská v Ω vzhledem k x. Pak (DR) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.

Konec 2. přednášky.

Důsledek 2.3 (Lokální Picardova věta): Je-li f lokálně lipšitzovská vzhledem k x a $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak $\exists \delta > 0$ takové, že (DR)+p.p. má právě jedno řešení.

TVRZENÍ 2.4 Pokud $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jsou spojité v Ω pro $j = 1, 2, \dots, n$, pak f je v Ω lokálně lipšitzovská vzhledem k x.

Důkaz: přes nějakou variantu věty o střední hodnotě.

3 MAXIMALITA ŘEŠENÍ

DEFINICE: Řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ nazveme prodloužením řešení (x, I), jestliže $I \subset \tilde{I}$ a $\forall t \in I : \quad x(t) = \tilde{x}(t)$ (takže $x = \tilde{x}|_I$).

Řešení je maximální, pokud nemá žádné netriviální prodloužení (takže různe od sebe sama).

Věta 3.1 Nechť (x, I) je řešení (DR). Pak (x, I) má aspoň jedne maximální prodloužení.

ZORNNOVO LEMMA: Buď M libovolná neprázdná množina částečně uspořádaná relaci "$<$". Nechť každý řetězec v M je shora omezený. Pak v M existuje maximální prvek.

Důkaz Věty 3.1:

LEMMA 3.2 Buď (x, I) řešení (DR), $I = (a, b), b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b, pravě když platí zároveň

(I) $b < +\infty$,

(II) $\exists \lim\limits_{t \to b-} x(t)$ (označme ji x_0), a

(III) $(x_0, b) \in \Omega$.

Věta 3.3 (O opuštění kompaktu). Buď (x, I) maximální řešení (DR). Nechť $K \subset \Omega$ je kompakt a $\exists t_0 \in I,\ (x(t_0), t_0) \in \Omega$.

Pak $\exists t_1 > t_0,\ t_1 \in I$ takové, že $(x(t_1), t_1) \notin K$,
a $\exists t_2 < t_0,\ t_2 \in I$ takové, že $(x(t_2), t_2) \notin K$.

4 Závislost řešení na počáteční podmínce a parametrech.

DEFINICE. Buď f v Ω lokálně lipšitzovská vzhledem k x. Řešící funkcí (DR) nazveme funkci $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ definovanou předpisem

$$\varphi(t; t_0, x_0) := x(t),$$

kde x je maximální řešení (DR) splňující $x(t_0) = x_0$.

Věta 4.1. (Gronwallowo Lemma). Nechť g, w jsou spojité nezáporné funkce na I, $t_0 \in I$ a $K \ge 0$. Nechť $\forall t \in I$

$$w(t) \le K + \left| \int_{t_0}^{t} w(s) g(s) \right|.$$

Potom

$$w(t) \le K \exp\left(\left|\int\limits_{t_0}^{t} g(s)\right|\right).$$

<u>DŮSLEDEK.</u> Nechť f je globalně lipšitzovská vzhledem k x s konstantou L. Nechť x a y jsou dva řešení (DR) na I s p.p. $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Pak $\forall t \in I$

$$|x(t) - y(t)| \le |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|}.$$

<u>Věta 4.2.</u> Buď G množina s definice řešici funkce, a f je lokalně lipšitzovská. Pak G je otevřena a φ spojitá v G.

<u>Věta 4.3.</u> Buď f je třídy C^1 vzhledem k x a φ buď řešici funkce (DR). Potom $\forall (t, t_0, x_0) \in G$ a $\forall w \in \mathbb{R}^n$ existuje derivace φ podle x_0 ve směru w v bodě (t, t_0, x_0), tj.

$$D_w \varphi(t; t_0, x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t; t_0, x_0 + h \cdot w) - \varphi(t; t_0, x_0)}{h}.$$

Označíme-li pro pevné (t_0, x_0)

$$x(t) := \varphi(t; t_0, x_0)$$

a

$$u(t) := D_w \varphi(t; t_0, x_0),$$

pak platí

$$u'(t) = [\nabla_x f(x(t), t)] u(t), \quad u(t_0) = w. \tag{V}$$

Říkáme, že u splňuje rovnici ve variacích.

Důkaz. Buď $(x_0, t_0) \in \Omega$. Definujme

$$x(t) := \varphi(t; t_0, x_0)$$

maximální řešení splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$. Vezmeme $w \in \mathbb{R}^n$ a definujme funkce u jako řešení rovnici ve variacích (V). Dokažeme, že

$$u(t) = D_w \varphi(t; t_0, x_0).$$

Vezmeme t pevné a h dost malé. Pak $\varphi(t; t_0, x_0 + hw)$ je definováno (plyne z otevřenosti G). Označme y_h řešení s počáteční podmínkou $y_h(t_0) = x_0 + hw$. Chceme zkoumat výraz

$$\eta_h(t) = \frac{\varphi(t; t_0, x_0 + hw) - \varphi(t; t_0, x_0)}{h} - u(t) = \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t).$$

Chceme dokázat, že $\lim\limits_{h \to 0} \eta_h(t) = 0$. Máme

$$\frac{y_h(t) - x(t)}{h} = w + \frac{1}{h} \int\limits_{t_0}^{t} \left(f(y_h(s), s) - f(x(s), s) \right) ds = w + \frac{1}{h} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{0}^{1} \nabla_x f\left(x(s) + \theta(y_h(s) - x(s)), s \right) \cdot (y_h(s) - x(s)) d\theta ds$$

a

$$u(t) = w + \int\limits_{t_0}^{t} \nabla_x f(x(s), s) u(s) ds,$$

když odečteme, dostaneme

$$\frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \nabla_x f(x(s), s) \left(\frac{y_h(s) - x(s)}{h} - u(s) \right) ds +$$

$$+ \frac{1}{h} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{0}^{1} \left[\nabla_x f(x(s) + \theta(y_h(s) - x(s)), s) - \nabla_x f(x(s), s) \right] (y_h(s) - x(s)) d\theta ds.$$

Pro $y_h(s) - x(s)$ použijeme důsledek z Věty 4.1,

$$|y_h(s) - x(s)| \le |hw| e^{L|s-t_0|}.$$

Označme $\eta_h(t) := \frac{y_h(t) - x(t)}{h} - u(t)$. Pak platí odhad

$$|\eta_h(t)| \le \int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{|\nabla_x f(x(s), s)|}_{\le C} \cdot |\eta_h(s)| ds + \underbrace{\max_{|x-y| \le |h| e^{L|t-t_0|}} |\nabla_x f(x, s) - \nabla_x f(y, s)| \cdot}_{\to 0 \text{ pro } h \to 0} \int\limits_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|}$$

7. Stabilita řešení

$$x' = f(x,t) \qquad (DR).$$

Motivace. V kapitole 4 odvoldili jsme spojitou závislost na počáteční podmínce

$$|x(t) - y(t)| \le |x_0 - y_0| \cdot e^{L|t-t_0|},$$

kde $x_0 - y_0 = x(t_0) - y(t_0)$, a L je lipšitzovská konstanta funkce f. Odsud vidíme, že pokud $x(t_0) - y(t_0)$ je malé, pak $x(t) - y(t)$ je malé na každém omezeném intervalu $[t_0, t_0 + T]$.

Pro $T \to +\infty$ odhad se kazí.

Otázka: Zůstanou řešení x a y blízko i pro $t \to +\infty$?

Definice. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\tau \in \mathbb{R}$ a $\{0\} \times [\tau, +\infty) \subset \Omega$. Buď $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a lokálně lipšitzovská vzhledem k x a platí

$$f(0,t) = 0 \qquad \forall t \ge \tau.$$

Označme

$$I = [\tau, +\infty).$$

Pak nulové řešení rovnice (DR) se nazývá

I. stabilní, je-li $\forall t_0 \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0\ \forall t \ge t_0 : \quad |x_0| < \delta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$

II. nestabilní, je-li není stabilní.

III. lokální atraktor, je-li $\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ \forall x_0 : \quad |x_0| < \eta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$

IV. asymptoticky stabilní, je-li je stabilní a je lokální atraktor.

V. uniformně stabilní, je-li $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t_0 \in I\ \forall t \ge t_0\ \forall x_0 : \quad |x_0| < \delta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$

VI. uniformně asymptoticky stabilní, je-li je uniformně stabilní a zároveň

$$\exists \eta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists T > 0\ \forall t_0 \in I\ \forall t \ge t_0 + T\ \forall x_0 : \quad |x_0| < \eta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Pro autonomní rovnice $x' = f(x)$ stabilita je ekvivalentní uniformní stabilitě, a asymptotická stabilita je ekvivalentní uniformní asymptotické stabilitě.

Příklad. Míč na kopci (nestabilní), míč na rovině (stabilní ale není asymptoticky stabilní), míč na dně (asymptoticky stabilní).

Poznámka. Definujme pojmy pro obecné řešení $x_0(t), t \in I$. Označme $y(t) = x(t) - x_0(t)$, pak

$$y'(t) = f(x(t), t)) - f(x_0(t), t) = \underbrace{f(y(t) + x_0(t), t) - f(x_0(t), t)}_{:= g(y(t), t)}.$$

x_0 je stbilní řešení (DR) právě tehdy, kdy y je stabilní řešení rovnice $y' = g(y, t)$.

Věta 7.1 Nulové řešení rovnice $x' = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

I. asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} \lambda < 0\ \forall \lambda \in \sigma(A)$.

II. stabilní $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} \lambda \le 0\ \forall \lambda \in \sigma(A)$ a Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům s $\operatorname{Re} \lambda = 0$ mají velikost 1.

Důkaz: ihned z Věty 6.5.

Poznámka. Pro (HRK) $x' = Ax$ mají všechna řešení stejný typ stability.

Poznámka. Je-li A závislá na čase, pak žádná taková spektrální podmínka nefunguje.

Věta 7.2. Buď $A : I = [\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ spojitá, Φ libovolná fundamentální matice úlohy $(LR) \quad x' = A(t)x$. Potom nulové řešení je

I. stabilní $\Leftrightarrow \quad \|\Phi(t)\|$ je omezená na I.

II. uniformně stabilní $\Leftrightarrow \quad \exists C > 0\ \forall s \le t \in I : \quad \|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \le C.$

III. asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow \quad \|\Phi(t) \to 0\|$ pro $t \to +\infty$.

IV. uniformně asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, C > 0\ \forall s \le t \in I : \quad \|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \le Ce^{-\alpha(t-s)}.$

LEMMA 7.3. Dána rovnice $x' = Ax + g(x,t)$. Nechť $\|e^{tA}\| \le Ke^{-\alpha t} \quad \forall t \ge 0$, g spojitá v $\mathbb{R}^{n+1}$ a $|g(x,t)| \le \gamma \cdot |x|$, kde $\gamma < \frac{\alpha}{K}$. Pak nulové řešení je uniformně asymptoticky stabilní.

Důkaz. Buď x řešení. Označme $b(t) := g(x(t),t)$, pak původní nelineární rovnici zapíšeme jako lineární rovnici s neznámou pravou části,

$$x' = Ax + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Z věty o variaci konstant najdeme

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \underbrace{b(s)}_{g(x(t),t)} ds$$

a odhadneme

$$|x(t)| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0| + \int_{t_0}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)} \cdot \gamma \cdot |x(s)|ds.$$

Vynásobíme obě strany $e^{\alpha t}$ a použijeme Gronwallovo lemma.

$$|e^{\alpha t}x(t)| \le Ke^{\alpha t_0}|x_0| + \int_{t_0}^{t} K\gamma \cdot e^{\alpha s} \cdot \cdot |x(s)|ds,$$

$$(GL) \Rightarrow |e^{\alpha t}x(t)| \le Ke^{\alpha t_0}|x_0| \cdot e^{K\gamma(t-t_0)}, \quad t > t_0,$$

pak

$$|x(t)| \le K|x_0| \cdot e^{(K\gamma-\alpha)(t-t_0)}, \quad t > t_0,$$

a máme hotovo protože $K\gamma - \alpha < 0$.

□

Každou lineární rovnici můžeme zapsat jako

$$(AR) \quad x' = f(x,t), \qquad x' = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{zbytek}_{o(x-x_0)},$$

Věta 7.4 (o linearizované stabilitě). Dána rovnice $(AR) \quad x' = f(x)$, kde f je třídy C^1 na okolí x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a matice $A = \nabla f(x_0)$ splňuje $\operatorname{Re}\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$. Pak $x(t) \equiv x_0$ je uniformně asymptoticky stabilní.

Věta 7.5 (o linearizované nestabilitě). Dána rovnice $(AR) \quad x' = f(x)$, kde f je třídy C^1 na okolí x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a matice $A = \nabla f(x_0)$ splňuje $\exists \lambda \in \sigma(A) \quad \operatorname{Re}\lambda > 0$. Pak $x(t) \equiv x_0$ je nestabilní.

Poznámka 1. Nedokážeme rozhodnout případ $\max \operatorname{Re}\lambda = 0$.

Poznámka 2. Dává jen lokální výsledky.

Důkaz věty 7.4: Definujme $g(x) = f(x) - \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=:A} \cdot x$. Máme

$$(AR) \quad \Leftrightarrow \quad x' = Ax + g(x).$$

Označme $\lambda_0 := max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$ a buď $\alpha \in (\lambda_0, 0)$. Pak $\exists K > 0 : \quad \|e^{tA}\| \le Ke^{-\alpha t}$ (Důsledek 6.6).

Platí $\frac{g(x)}{|x|} \to 0$ pro $x \to x_0$ (zbytek Taylorova polynomu $g(x) = o(x)$ pro $x \to x_0$). Volime $\gamma > 0, \gamma < \frac{\alpha}{K}$ a najdeme $\Delta > 0$ aby

$$\frac{|g(x)|}{|x|} < \gamma \quad \forall x : |x - x_0| < \Delta, \quad \text{takže } |g(x)| < \gamma|x| \qquad (*)$$

Aplikujeme seřezávací funkci, aby nerovnost $(*)$ platila na celém $\mathbb{R}^n$,

$$h(x) := \eta(|x - x_0|) \cdot g(x), \quad \text{kde} \quad \eta(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \frac{\Delta}{2}], \\ \text{spojitá a je v intervalu } (0,1) \text{ pro } s \in (\frac{\Delta}{2}, \Delta), \\ 0, & s \ge \Delta. \end{cases}$$

Podivejme se na rovnici $x' = Ax + h(x)$. Ona splňuje předpoklady Lemmatu 7.3: pro $|x - x_0| \le \frac{\Delta}{2}$, $|h(x)| = |g(x)| < \gamma|x|$. Pro $|x - x_0| \le \Delta$, $|h(x)| \le |g(x)| < \gamma|x|$. Pro $|x - x_0| > \Delta$, $0 = |h(x)| < \gamma|x|$.

Pak stacionární řešení $x = x_0$ je uniformně asymptoticky stabilní, tedy je i stabilní. Pak $\exists \delta > 0$ že $|x(t_0) < \delta| \;\Rightarrow\; |x(t)| < \frac{\Delta}{2}\ \forall t > t_0$.

Takže pokud $|x(t_0) - x_0| < \delta$, pak $x' = Ax + h(x) = Ax + g(x) = f(x)$.

Takže x je řešení (AR) a $x(t) \to x_0$, odkud plyne, že $x = x_0$ je také uniformně asymptoticky stabilní řešení (AR).

$\square$

Důkaz Věty 7.5. Myšlenka důkazu: chceme pro nelinární rovnici ukázat, že řešení se drží nestabilních směrů.

Krok 1. přejdeme k Jordanově kanonickému tvaru.

Krok 2. pokud p.p. je v nějakém kuželu nestabilního směru, pak řešení půjde nestabilním směrem a opustí okolí bodu 0.