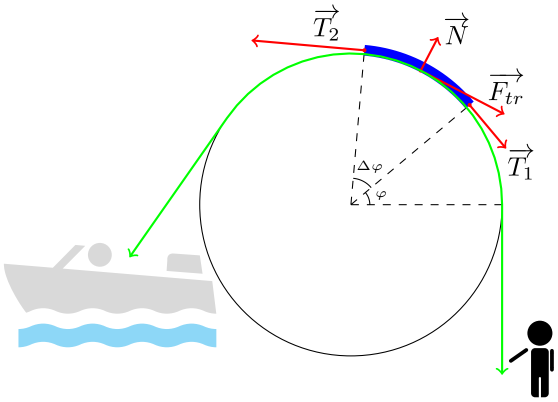
**Cvičení 1 (ODR 1) 20.2.2024**

**1.1** Úlohy vedoucí k obyčejným diferenciálním rovnicím.

1. Parašutista skočil z výšky 1.5 km a otevřel padák ve výšce 0.5 km. Jak dlouho padal, než se otevřel padák? Je známo, že mezní rychlost pádu osoby ve vzduchu normální hustoty je 50 m/s. Ignorujte změnu hustoty. Odpor je úměrný druhé mocnině rychlosti.

2. K zastavení říčních lodí u mola se z nich hází lano, které se omotá kolem sloupu stojícího na molu. Jaká síla působí na loď, když lano udělá tři otočky kolem tyče, součinitel tření lana o tyč je 1/3 a pracovník na molu táhne za volný konec lana silou 10 kg.




Uvažujme malou část lana odpovídající úhlu $\Delta\varphi$. Podívejme se, jaké síly na něj působí. Na tento malý úsek působí: napínací sily $T(\varphi)$, působící v krajních bodech a směrovaný ve směru lana, tedy tečně ke kružnici. Dále, reakční síla sloupu, působící ve středu segmentu a směřující kolmo k povrchu tyčí ve směru od kolony ven. Dále, třecí síla působící v místě kontaktu a směřující proti směru možného pohybu. Gravitační sílu můžeme ignorovat.

**1.2.** Vyšetřete (i graficky) průběh řešení následujících diferenciálních rovnic. Zaměřte se na

- existenci řešení
- jednoznačnost řešení
- stacionární (tj. konstantní) řešení
- monotonii (včetně typu) a extrémy
- konvexitu, konkavitu, inflexní body
- co když se řešení blíží problematickým bodům

(a) $x' = t^2(x+1)$

(b) $x' = x\ln(x+3)$

**1.3.**(a) Řešení rovnice $x' = (x+1)/(t+1)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 2$. Kdy dosáhne hodnoty 4?

(b) Řešení rovnice $x' = t\ln(x)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 1$. V jakém čase dosáhne hodnoty 2?

**1.4.** Co lze říci o existenci řešení rovnice $x' = \operatorname{sgn}(x) + 1$, $x(0) = 0$?

**1.5.** Jako *autonomní rovnicí* označujeme rovnici ve tvaru $x' = f(x)$, kde $f$ buď např. spojitá reálná funkce na intervalu. Ukažte, že jestliže existuje vlastní limita $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1$, pak nezbytně $f(x_1) = 0$. (*Návod*: Užijte $x(b) - x(a) = \int_a^b x'(s)ds$ platící pro $C^1$-funkce.)

Řešení.

**1.1, 1.** Označme výšku přes x(t), pak rychlost je $\dot{x}(t)$ a zrychlení je $\ddot{x}(t)$. Osu x orientujeme dolů, pak rychlost a zrychlení jsou kladná. Newtonova rovnice je

$$m\ddot{x}(t) = mg - k(\dot{x}(t))^2,$$

pro někjakou konstantu $k > 0$. V nulový čas máme $x(0) = -1500, \dot{x}(t) = 0$, v nějaký čas $t_1$ máme $x(t_1) = -500(m)$. Z rovnici vidíme, že existuje limitní rychlost $v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$. Označme $y(t) = \dot{x}(t)$ a řešíme rovnici pomocí separací proměnných. Přijdeme k

$$y(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh(gt) = v_{lim} \tanh(gt)$$

a integrujeme-li, dostaneme pak

$$x(t) = x_0 + \sqrt{\frac{m}{gk}} \log(\cosh gt) = x_0 + \frac{v_{lim}}{g} \log(\cosh gt).$$

Dosadíme tady, $t = t_1$ a vyjádřeme $t_1$ y pravé strany. Víme, že $\log(w + \sqrt{w^2} - 1) = \mathrm{arccosh} w$.

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{g} \log\left(\exp\frac{g(x_1 - x_0))}{v_{lim}} + \sqrt{\exp\frac{2g(x_1 - x_0))}{v_{lim}} - 1}\right) \\ &= \frac{x_1 - x_0}{v_{lim}} + \frac{1}{g}\log\left(1 + \sqrt{1 - \exp\frac{-2g(x_1 - x_0))}{v_{lim}}}\right) \end{aligned}$$

Argument exponenty je -20 * 1000 / 50 = -400, pak exponentu můžeme zanechat, a přibližný výsledek bude

$$t \approx \frac{x_1 - x_0}{v_{lim}} + \frac{\log 2}{g} = \frac{1000}{50} + \frac{\log 2}{9.8} \approx 20 + 0.7(\text{vteřin}).$$

Vidíme, že pokud vezmeme rychlost konstantí, jako $v_{lim}$, chyba bude jen $\frac{\log 2}{g} \approx 0.7$ vteřina.

Výpočet je tady: https://sagecell.sagemath.org/?z=eJyrMFCwVdA1NDUw4OWqMASxwUxernQg21LPgperLCczF8g2BYsWFGXmlWi
=&lang=sage&interacts=eJyLjgUAARUAuQ==

**1.1, 2.** $\dot{T}(\varphi) = \mu T(\varphi)$, $T(0) = 100(N)$, pak $T(\varphi) = e^{\mu\varphi} T(0)$ a $T(6\pi) = e^{2\pi} T(0) = 100e^{2\pi} \approx 535 * 100(N) = 53.5(kN)$.

Jedno otočení zvýší silu $e^{2/3\pi} \approx 8$ krát, druhé $e^{4/3\pi} \approx= 66$ krát, třetí $e^{2\pi} \approx= 535$ krát, čtvrté $e^{8/3\pi} \approx= 4348$ krát.

Výpočet: https://sagecell.sagemath.org/?z=eJwrKMrMK9FIrSjQMNI31vLTKMjU1NTk5eL1KoBLmOCSMMIubIFQDwDbpR15&lang=sage&interacts=eJyLjgUAARUAuQ==