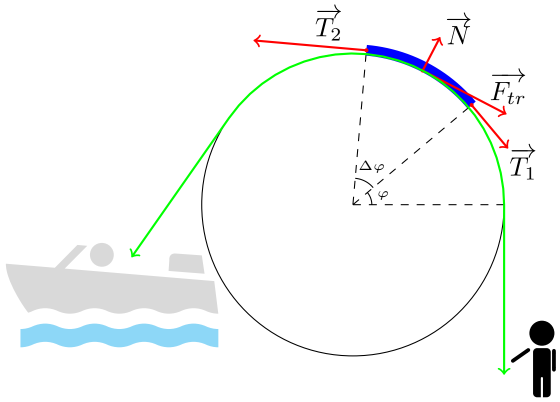
Cvičení 1 (ODR 1) 20.2.2024

1.1 Úlohy vedoucí k obyčejným diferenciálním rovnicím.



1. Parašutista skočil z výšky 1.5 km a otevřel padák ve výšce 0.5 km. Jak dlouho padal, než se otevřel padák? Je známo, že mezní rychlost pádu osoby ve vzduchu normální hustoty je 50 m/s. Ignorujte změnu hustoty. Odpor je úměrný druhé mocnině rychlosti.

2. K zastavení říčních lodí u mola se z nich háží lano, které se omotá kolem sloupu stojícího na molu. Jaká síla působí na loď, když lano udělá tři otočky kolem tyče, součinitel tření lana o tyč je 1/3 a pracovník na molu táhne za volný konec lana silou 10 kg.

Uvažujme malou část lana odpovídající úhlu $\Delta\varphi$. Podívejme se, jaké síly na něj působí. Na tento malý úsek působí: napínací sily $T(\varphi)$, působící v krajních bodech a směrovaný ve směru lana, tedy tečně ke kružnici. Dále, reakční síla sloupu, působící ve středu segmentu a směřující kolmo k povrchu tyčí ve směru od kolony ven. Dále, třecí síla působící v místě kontaktu a směřující proti směru možného pohybu. Gravitační sílu můžeme ignorovat.

1.2. Vyšetřete (i graficky) průběh řešení následujících diferenciálních rovnic. Zaměřte se na

- existenci řešení
- jednoznačnost řešení
- stacionární (tj. konstantní) řešení
- monotonii (včetně typu) a extrémy
- konvexitu, konkavitu, inflexní body
- co když se řešení blíží problematickým bodům

(a) $x' = t^2(x+1)$

(b) $x' = x\ln(x+3)$

1.3.(a) Řešení rovnice $x' = (x+1)/(t+1)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 2$. Kdy dosáhne hodnoty 4?

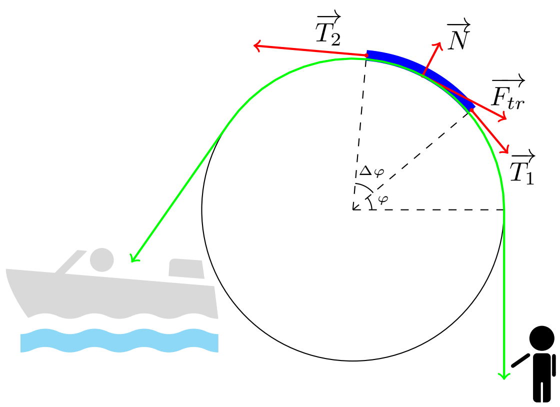
(b) Řešení rovnice $x' = t\ln(x)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 1$. V jakém čase dosáhne hodnoty 2?

1.4. Co lze říci o existenci řešení rovnice $x' = \operatorname{sgn}(x) + 1$, $x(0) = 0$?

1.5. Jako *autonomní rovnicí* označujeme rovnici ve tvaru $x' = f(x)$, kde f buď např. spojitá reálná funkce na intervalu. Ukažte, že jestliže existuje vlastní limita $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1$, pak nezbytně $f(x_1) = 0$. (*Návod*: Užijte $x(b) - x(a) = \int_a^b x'(s)ds$ platící pro C^1-funkce.)

Cvičení 1 (ODR 1) 20.2.2024

1.1 Úlohy vedoucí k obyčejným diferenciálním rovnicím.



1. Parašutista skočil z výšky 1.5 km a otevřel padák ve výšce 0.5 km. Jak dlouho padal, než se otevřel padák? Je známo, že mezní rychlost pádu osoby ve vzduchu normální hustoty je 50 m/s. Ignorujte změnu hustoty. Odpor je úměrný druhé mocnině rychlosti.

2. K zastavení říčních lodí u mola se z nich háží lano, které se omotá kolem sloupu stojícího na molu. Jaká síla působí na loď, když lano udělá tři otočky kolem tyče, součinitel tření lana o tyč je 1/3 a pracovník na molu táhne za volný konec lana silou 10 kg.

Uvažujme malou část lana odpovídající úhlu $\Delta\varphi$. Podívejme se, jaké síly na něj působí. Na tento malý úsek působí: napínací sily $T(\varphi)$, působící v krajních bodech a směrovaný ve směru lana, tedy tečně ke kružnici. Dále, reakční síla sloupu, působící ve středu segmentu a směřující kolmo k povrchu tyčí ve směru od kolony ven. Dále, třecí síla působící v místě kontaktu a směřující proti směru možného pohybu. Gravitační sílu můžeme ignorovat.

1.2. Vyšetřete (i graficky) průběh řešení následujících diferenciálních rovnic. Zaměřte se na

- existenci řešení
- jednoznačnost řešení
- stacionární (tj. konstantní) řešení
- monotonii (včetně typu) a extrémy
- konvexitu, konkavitu, inflexní body
- co když se řešení blíží problematickým bodům

(a) $x' = t^2(x+1)$

(b) $x' = x\ln(x+3)$

1.3. (a) Řešení rovnice $x' = (x+1)/(t+1)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 2$. Kdy dosáhne hodnoty 4?

(b) Řešení rovnice $x' = tln(x)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 1$. V jakém čase dosáhne hodnoty 2?

1.4 Co lze říci o existenci řešení rovnice $x' = \operatorname{sgn}(x) + 1$, $x(0) = 0$?

1.5. Jako autonomní rovnicí označujeme rovnici ve tvaru $x' = f(x)$, kde f buď např. spojitá reálná funkce na intervalu. Ukažte, že: (a) Jestliže existuje vlastní limita $lim_{t\to\infty}x(t) = x_1$, pak nezbytně $f(x_1) = 0$. Návod: Užijte $\int_a^b x'(s)ds = x(b) - x(a)$ platící pro C^1-funkce.