

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2024–2025
TÝDEN 1 CVIČENÍ 2

1. VYŠETŘOVÁNÍ KONVERGENCE ČÍSELNÝCH ŘAD S NEZÁPORNÝMI ČLENY

Úlohy na součet řad. Najděte součty následujících řad, pokud konvergují:

$$(1.1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + \dots$$

$$(1.2) \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

$$(1.3) \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

$$(1.4) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$(1.5) \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

$$(1.6) \quad q \sin \varphi + q^2 \sin 2\varphi + \dots + q^n \sin(n\varphi) + \dots, \quad |q| < 1$$

$$(1.7) \quad q \cos \varphi + q^2 \cos 2\varphi + \dots + q^n \cos(n\varphi) + \dots, \quad |q| < 1$$

$$(1.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)^a - 2(n+1)^a + n^a), \quad a \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

(1.9) Bob a Eva hrají hru. Hodí stejnou mincí mnohokrát za sebou. Pokud prvními přijdou dva orla za sebou, vyhraje Bob. Pokud prvními přijdou orel a pak panna, vyhraje Eva.

(a) Kdo má větší šanci vyhrát hru?

(b) Kolik tahů v průměru zabere Bobovi v nepřítomnosti Evy, aby čekal dvě hlavy za sebou?

(c) Kolik hodů mincí je v průměru potřeba, aby se dostaly v řadě orel a pak panna?

Úlohy na konvergenci řad. Dokažte konvergenci podle Bolzanova - Cauchyova kritéria:

$$(2.1) \quad \left(\frac{\cos x - \cos 2x}{1}\right) + \left(\frac{\cos 2x - \cos 3x}{2}\right) + \dots + \left(\frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{n}\right) + \dots$$

$$(2.2) \quad \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(x^2)}{2^2} + \dots + \frac{\cos(x^n)}{n^2} + \dots$$

Úlohy na konvergenci řad. Vyšetřete konvergenci řad (v závislosti na parametrech):

$$(2.1) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}$$

$$(2.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}$$

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[n]{n^2+n+b})$$

$$(2.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$$

$$(2.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \frac{\pi n}{4n-2} - \sin \frac{\pi n}{2n+1} \right)$$

$$(2.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

$$(2.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right)$$

$$(2.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$$

$$(2.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$$

$$(2.10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a (\ln n)^b (\ln \ln n)^c}$$